© Е. В. Орешкина, 22503

Стратегия Келли управления капиталом при покупке опционов

Аннотация. Стратегия Келли (критерий Келли) – это финансовая стратегия ставок, определяющая размеры вложений в процентах от величины капитала. Критерий Келли применяется в сфере спортивных ставок, в азартных играх, в управлении капиталом при игре на финансовых рынках, в том числе и при работе с опционами, и во многих других сферах. С помощью критерия Келли можно вычислить, какую долю капитала стоит вложить в покупку опциона, основываясь на вероятности его исполнения.
В данной работе решается оптимизационная задача вложения капитала с помощью стратегии Келли. Найдены оптимальные доли капитала, которые необходимо вложить в покупку двух опционов на акции. Проведен анализ полученного решения и представлены численные результаты применения стратегии Келли. Показано, что вложение капитала в два инструмента выгоднее для инвестора, чем в каждый по отдельности, при использовании стратегии Келли.
Ключевые слова: стратегия Келли, опцион, управление капиталом, инвестирование, модель Блека-Шоулза.

Введение

В настоящее время в связи с развитием в России рыночной экономики многих инвесторов привлекают финансовые рынки, в частности, рынок опционов. Рынок опционов популярен благодаря своим преимуществам. Во-первых, опционы гарантируют большую доходность, чем покупка и продажа акций. Во-вторых, опционы минимизируют риски, защищают владельца от неблагоприятного развития событий. В-третьих, существует множество стратегий торговли опционами.

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что данный финансовый инструмент выгоден для инвесторов. Важными задачами финансовой математики являются как задача определения справедливой цены опциона, так и задача управления капиталом при вложении средств в покупку опционов.

Одним из эффективных методов управления капиталом является стратегия Келли (критерий Келли). Целью данной работы является определение справедливых цен опционов на акции и решение оптимизационной задачи вложения капитала в покупку двух опционов при использовании стратегии Келли.

В последующих разделах статьи рассматривается способ ценообразования опционов на примере акций компаний МТС и Северсталь с помощью модели Блека-Шоулза, а также определяются оптимальные доли вложения капитала в покупку двух опционов при использовании стратегии Келли.

1. Критерий Келли

Критерий Келли (англ. Kelly criterion) — финансовая стратегия ставок, которая применяется в сфере спортивных ставок, в азартных играх, в управлении капиталом при игре на финансовых рынках, в том числе и при работе с опционами, и во многих других сферах.

С помощью критерия Келли можно вычислить, какую долю капитала стоит вложить в покупку опциона, основываясь на вероятности его исполнения [1; 46–50]. Рассмотрим задачу вложения капитала в покупку двух опционов колл (на покупку) европейского типа. Опцион колл (на покупку) европейского типа — договор, по которому покупатель опциона получает право совершить покупку актива по заранее оговорённой цене в определённый договором момент в будущем [3; 35].

1.1 Задача управления капиталом при покупке двух опционов

Согласно критерию Келли оптимальные доли капитала определяются в результате решения оптимизационной задачи:

$F(z_1, z_2) = M[\ln(1 + \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2)] \to max,$

z_1 и z_2 – доли капитала, которые следует вкладывать в покупку первого и второго опционов, соответственно, z_1 и $z_2 \in [0,1]$;
ξ_1 и ξ_2 – финансовые результаты, отнесённые к единицам вложенного капитала в первый и второй опционы, соответственно.

$$\xi_1 = \frac{\max\left\{0,\ S_T^{(1)} - K_1\right\} - C_1}{C_1},\ \xi_2 = \frac{\max\left\{0, S_T^{(2)} - K_2\right\} - C_2}{C_2},$$

где $S_T^{(1)}$, $S_T^{(2)}$ – стоимости активов в момент времени T с логнормальной плотностью распределения $g_1(x)$ и $g_2(y)$, соответственно;
K_1 и K_2 – цены исполнения опционов;
C_1 и C_2 – цены (общем случае не равные теоретическим), по которым можно купить опционы, то есть суммы средств, которые будут потрачены на приобретение контрактов и которые могут быть потеряны в случае неисполнения опционов.

Учитывая, что активы являются независимыми, задача принимает следующий вид:

$$F(z_1, z_2) = \ln(1 - z_1 - z_2)(1 - p_1)(1 - p_2) + (1 - p_1)\int_{K_2}^{\infty} \ln\left(1 - z_1 + \frac{y - K_2 - C_2}{C_2} z_2\right) g_2(y)dy + (1 - p_2)\int_{K_1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x - K_1 - C_1}{C_1} z_1 - z_2\right) g_1(x)dx + \int_{K_2}^{\infty}\left[\int_{K_1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x - K_1 - C_1}{C_1} z_1 + \frac{y - K_2 - C_2}{C_2} z_2\right) g_1(x)dx\right] g_2(y)dy,$$

где p_1 и p_2 – вероятности исполнения опционов;
x и y – стоимости активов на момент исполнения с логнормальной плотностью распределения $g_1(x)$ и $g_2(y)$, соответственно.

После преобразований функцию $F(z_1, z_2)$ нужно продифференцировать по z_1 и z_2, и приравнять к нулю. Оптимизационная задача сводится к решению следующей системы интегральных уравнений по z_1 и z_2:

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = -\frac{(1 - p_1)(1 - p_2)}{1 - z_1 - z_2} - C_2(1 - p_1)\int_{K_2}^{\infty} \frac{g_2(y)}{C_2(1 - z_1) + z_2(y - K_2 - C_2)} dy + \frac{p_1}{z_1} - \frac{C_1(1 - p_2)(1 - z_2)}{z_1}\int_{K_1}^{\infty} \frac{g_1(x)}{C_1(1 - z_2) + z_1(x - K_1 - C_1)} dx + \frac{1}{z_1}\int_{K_2}^{\infty}\left[\int_{K_1}^{\infty} \frac{g_1(x)(-C_1C_2 - C_1z_2(y - K_2 - C_2))}{C_2z_1(x - K_1 - C_1) + C_1C_2 + C_1z_2(y - K_2 - C_2)}\ dx\right] g_2(y)dy = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_2} = -\frac{(1 - p_1)(1 - p_2)}{1 - z_1 - z_2} - C_1(1 - p_2)\int_{K_1}^{\infty} \frac{g_1(x)}{C_1(1 - z_2) + z_1(x - K_1 - C_1)} dx + \frac{p_2}{z_2} - \frac{C_2(1 - p_1)(1 - z_1)}{z_2}\int_{K_2}^{\infty} \frac{g_2(y)}{C_2(1 - z_1) + z_2(y - K_2 - C_2)} dy + \frac{1}{z_2}\int_{K_2}^{\infty}\left[\int_{K_1}^{\infty} \frac{g_1(x)(-C_1C_2 - C_2z_1(x - K_1 - C_1))}{C_2z_1(x - K_1 - C_1) + C_1C_2 + C_1z_2(y - K_2 - C_2)} dx\right] g_2(y)dy = 0.$$

2. Определение справедливых цен опционов на акции с помощью формулы Блэка-Шоулза

Перед тем как решать систему уравнений, описанную в предыдущем разделе, важно правильно рассчитать вероятности исполнения опционов p_1 и p_2. Это можно сделать с помощью модели Блэка-Шоулза [2; 249–261]. На примере акций компании Северсталь и МТС, применив модель Блэка-Шоулза, были вычислены вероятности исполнения и теоретические цены опционов колл для цен исполнения, равных начальным ценам активов. Результаты расчётов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения показателей

Показатель	Опцион на акции МТС	Опцион на акции Северсталь
К (цена исполнения опциона)	K_1 = 274,70	K_2 = 1083,40
p (вероятность исполнения опциона)	p_1 = 0,4995	p_2 = 0,5022
Ст (теоретическая стоимость опциона на продажу)	$C_T^{(1)}$ = 10,99	$C_T^{(2)}$ = 47,05

3. Определение оптимальных долей вложения капитала в покупку опционов

Так как систему интегральных уравнений явно решить нельзя, то решение было произведено численно в программе Mathematica. Были вычислены доли капитала, которые следует вкладывать в покупку каждого из опционов для различных возможных цен $C_1 \in [0; C_T^{(1)}]$ и $C_2 \in [0; C_T^{(2)}]$. Для рассчитанных ранее вероятностей исполнения и теоретических цен опционов по формуле Блека-Шоулза получены оптимальные значения z_1 и z_2, представленные в таблице 2:

Таблица 2. Оптимальные доли капитала для различных возможных цен C_1 и C_2

C_1 / C_2	0	5	10,99
0	z1 = 0.313 z2 = 0.401	z1 = 0.147 z2 = 0.495	z1 = 0 z2 = 0.502
20	z1 = 0.500 z2 = 0.133	z1 = 0.155 z2 = 0.268	z1 = 0 z2 = 0.273
40	z1 = 0.501 z2 = 0.036	z1 = 0.219 z2 = 0.064	z1 = 0 z2 = 0.071
47,05	z1 = 0.501 z2 = 0	z1 = 0.257 z2 = 0	z1 = 0 z2 = 0

Из таблицы 2 видно, что при увеличении цены на какой-либо опцион уменьшается доля, которую следует вложить в покупку этого опциона. Также видно, что выполняются следующие свойства:

1) Если $C_1 \to 0$, $C_2 \to 0$, то $z_1 \to \frac{p_1}{1+p_1p_2}$, $z_2 \to \frac{p_2}{1+p_1p_2}$,
2) Если $C_1 \geq C_T^{(1)}$, $C_2 \geq C_T^{(2)}$, то $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ – покупать по цене выше теоретической не выгодно,
3) Если $C_1 \geq C_T^{(1)}$, $C_2 < C_T^{(2)}$, то $z_1 = 0$, $z_2 > 0$ – следует покупать только второй опцион,
4) Если $C_1 < C_T^{(1)}$, $C_2 \geq C_T^{(2)}$, то $z_1 > 0$, $z_2 = 0$ – следует покупать только первый опцион,
5) Если $C_1 < C_T^{(1)}$, $C_2 < C_T^{(2)}$, то $z_1 > 0$, $z_2 > 0$ – покупать по цене ниже теоретической выгодно.

4. Сравнение результатов при вложении капитала в один или два опциона

Приведено сравнение решения при покупке одного опциона и двух. Сравнение проведено, например, для $C_1 = 5$ и $C_2 = 20$. При покупке двух опционов одновременно доли капитала, которые следует вложить в опционы на акции компаний МТС и Северсталь равны $z_1 = 0.155$ и $z_2 = 0.268$, а оптимальное значение критерия равно $F(z_1, z_2) = 0.225$. При покупке каждого опциона по отдельности, то есть или на акции МТС, или на акции Северсталь, доли вложения капитала равны $\widetilde{z_1} = 0.256$, $\widetilde{z_2} = 0.274$, а оптимальные значения критериев равны $\widetilde{F_1}(\widetilde{z_1}) = 0.114, \widetilde{F_2}(\widetilde{z_2}) = 0.133$.

Как видно оптимальные доли вложения капитала при покупке двух опционов уменьшились по сравнению с вложением в отдельный инструмент:

$z_1 < \widetilde{z_1}$, $z_2 < \widetilde{z_2}$.

Однако суммарная доля вложения капитала увеличилась:

$z_1 + z_2 > \widetilde{z_1}$, $z_1 + z_2 > \widetilde{z_2}$.

При этом оптимальное значение критерия (темп прироста капитала) также выросло:

$\widetilde{F_1}(\widetilde{z_1}) < F(z_1, z_2)$, $\widetilde{F_2}(\widetilde{z_2}) < F(z_1, z_2)$.

Таким образом, вложение капитала в покупку двух опционов выгоднее для инвестора, чем вложение в покупку одного.

Заключение

В процессе выполнения работы был рассмотрен способ ценообразования опционов, основанный на модели Блэка-Шоулза, и определены справедливые цены опционов на акции компаний МТС и Северсталь. Также решена оптимизационная задача определения оптимальных долей капитала для покупки двух опционов с помощью стратегии Келли. Сделан анализ полученного решения и представлены численные результаты применения стратегии Келли.

Критерий Келли - одна из самых эффективных стратегий, но она требует правильной оценки вероятности успеха. Критерий Келли может быть использован при долгосрочном инвестировании для максимизации ожидаемого уровня роста капитала. Данный критерий может быть применен не только для вложения как в один или два опциона, но и для нескольких опционов.

Список литературы

1. *Курбаковский, В.* Стратегия Келли на срочном рынке / Виталий Курбаковский // Futures&Options, 2009, №5, с.46 –50.
2. *Галиц, Л.* Финансовая инженерия / Л. Галиц. – М.: ТВП, 1998 – 576 с.
3. *Ивашко, А. А.* Дискретные задачи оптимальной остановки / А.А Ивашко. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2017 – 48 с.