Теорема Лагранжа

подготовила Бабеновская Татьяна

Май 2020

План

- Вступление
- Жозеф Луи Лагранж
- Вклад Лагранжа в области наук
- Формула конечных приращений Лагранжа
- Теорема Лагранжа
- Доказательство теоремы Лагранжа
- Теорема Лагранжа - Следствие 1
- Теорема Лагранжа - Следствие 2

Я сделал своё дело...Я никогда, никого не ненавидел, и не делал никому зла.
(Жозеф Луи Лагранж)

Жозеф Луи Лагранж

Известный французский математик и механик. Работы Лагранжа по математике, астрономии и механике составляют 14 томов. Ему удалось успешно разработать многие важные вопросы математического анализа. Лагранож дал очень удобную для практики формулу выражения остаточного члена ряда Тейлора, формулу конечных приращений и интерполяционную формулу, ввел метод множителей для решения задачи по нахождению условных экстремумов.

Вклад Лагранжа в области наук

В алгебре он разработал теорию, обобщением которой является теория Галуа, нашел метод приближенного вычисления корней алгебраического уравнения при помощи непрерывных дробей, метод разделения корней алгебраического уравнения, метод исключения переменной из системы уравнений, разложение корней уравнения в так называемый ряд Лаграножа. В теории чисел с помощью неправильных дробей решил неопределенные уравнения второй степени с двумя неизвестными, развил теорию квадратичных форм.

Формула конечных приращений Лагранжа

Формула дифференциального исчисления дает связь между приращением функции $f(x)$ и значениями ее производной:
$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Теорема Лангранжа

Теорема:

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в открытом промежутке (a, b) и сохраняет непрерывность на концах этого промежутка. Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Доказательство теоремы Лагранжа

- Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{1}$$

- Эта функция непрерывна и дифференцируема в промежутке [a,b], а на его концах принимает одинаковые значения:

$$F(a) = F(b) = 0$$

- Тогда F(x) удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и, следовательно, существует точка $c \in (a, b)$, в которой производная функции F(x) равна нулю:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \tag{2}$$

Теорема Лагранжа - Следствие 1

В частном случае, когда $f(b) = f(a)$, из теоремы Лагранжа вытекает, что существует точка $c \in (a, b)$, в которой производная функции $f(x)$ равна нулю: $f'(c) = 0$. Это означает, что теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля.

Теорема Лагранжа - Следствие 2

Если $f'(x) = 0$ во всех точках некоторого промежутка $[a, b]$, то $f(x) = const$ в этом промежутке. Действительно, пусть x_1 и x_2 - произвольные точки промежутка $[a, b]$ и. $x_1 < x_2$ Применяя теорему Лагранжа к промежутку $[a, b]$, получим $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_2 - x_1)$. Однако $f'(x) = 0$ во всех точках промежутка $[a, b]$. Тогда $f(x_2) = f(x_1)$ Учитывая произвольность точек x_1 и x_2 , получаем требуемое утверждение.