ПетрГУ

# Дифференциал функции

Должность: Студент
Дилба К. М.,
гр. 22101

# Содержание

# Дифференциал функции

## Теорема

Для того чтобы функция $f$ была дифференцируема в некоторой точке $x_0$, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную, причем в этом случае

$$dy = f'(x_0)dx \tag{1}$$

# Доказательство необходимости.

Пусть функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A$. Поэтому производная $f'(x_0)$ существует и равна $A$. Отсюда $dy = f'(x_0)dx$.

# Доказательство достаточности

Пусть существует производная $f'(x_0)$, т.е. существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + e(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} e(\Delta x) = 0$, и для $x \neq 0$.

# Доказательство достаточности

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + e(\Delta x)\Delta x, \tag{2}$$

и так как $e(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$, то наличие равенства (2) и означает дифференцируемость функции $f$ в точке $x_0$.

Теорема доказана

# Наклонная касательной к графику функции

## Определение

Если существует предел $\lim\limits_{h \to 0} k(h) = f'(x_0)$, то прямая

$$y = k_0(x - x_0) + y_0, \tag{3}$$

которая получается из прямой $y = k(h)(x - x_0) + y_0$ при $h \to 0$, называется наклонной касательной к графику функции $f$ в точке $(x_0, y_0)$.

# Правила вычисления производных

Пусть функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ имеют производные в точке $x_0$, тогда их сумма $y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ также имеет в точке $x_0$ производную и

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'. \tag{4}$$

Таким образом, производная суммы функций равна сумме производных.