

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Зайцева Д. А. группа 22103#

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	5

1 Описание работы

В ходе учебной практики я изучала возможности работы с LaTeX, использовала инструменты для создания и оформления математических текстов, а также gnuplot для визуализации данных. Практика состояла из нескольких заданий, каждое из которых способствовало углублению знаний о LaTeX и применении компьютерных технологий в математике. Они были выполнены после просмотра скринкастов, которые предоставил преподаватель.

Целью первого задания было создание документа, который включал в себя математический текст. В процессе выполнения я набирала математические формулы и выражения с использованием LaTeX, создавала специальные абзацы и новые окружения на основе просмотренных скринкастов. В результате выполнения этого задания я изучила базовый синтаксис LaTeX и научилась правильно оформлять математические формулы, используя соответствующие команды и синтаксис.

Во втором задании мы занимались построением графического изображения математической кривой в декартовых координатах с помощью интерпретатора команд gnuplot. Необходимо было создать график заданной функции при помощи командного синтаксиса, настроить его внешний вид и сохранить изображение. При помощи скринкастов были изучены такие моменты, как настройка gnuplot, работа с плавающими объектами, построение различных функций. Полученное изображение было добавлено в документ, который является результатом выполнения первого задания.

В результате выполнения заданий были освоены инструменты, необходимые для математического оформления и визуализации данных. Оба задания не только углубили мои знания в области научного оформления, но и позволили развить практические навыки работы с LaTeX и gnuplot.

2 Результаты работы

Задание 2

следует, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\beta' < x_{n_0} \leq \beta, \quad (5.53)$$

и поскольку $(\beta', \beta] \subset U(\beta)$, то при $n > n_0$ имеет место включение

$$x_n \in U(\beta), \quad (5.54)$$

а это и означает, что β является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Аналогично рассматривается случай $x_n \downarrow$. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е. 1. Если $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, — система вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, а ξ — точка, принадлежащая всем отрезкам этой системы, то

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (5.55)$$

В самом деле, последовательность $\{a_n\}$ возрастает, а $\{b_n\}$ убывает, кроме того (см. (4.25) в п. 4.5), было показано, что $\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$. Поэтому равенство (5.55) сразу следует из теоремы 3.

П р и м е р 6. (число e). Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.56)$$

и покажем, что она строго возрастает и ограничена сверху, а следовательно, согласно теореме 3, имеет конечный предел.

Применив формулу бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned}
 x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2} + \dots \\
 &\dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 1}{n!} \frac{1}{n^n} = \\
 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots \\
 &\dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \tag{5.57}
 \end{aligned}$$

Из выражения, стоящего в правой части равенства, видно, что при переходе от n к $n+1$ число слагаемых (которые все положительны) в написанной сумме возрастает на единицу и каждое слагаемое, начиная с третьего, увеличивается, так как становится больше выражение, стоящее в каждой круглых скобках, ибо

$$1 - \frac{s}{n} < 1 - \frac{s}{n+1}, \quad s = 1, 2, \dots, n-1, \quad n = 2, 3, \dots$$

Это означает строгое возрастание последовательности (5.56):

$$x_n < x_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{5.58}$$

Далее, поскольку

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{s}{n} &< 1, \quad s = 1, 2, \dots, n-1, \quad n = 2, 3, \dots, \tag{5.59} \\
 2^{n-1} &= \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ сомножителей}} \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!,
 \end{aligned}$$

и поэтому

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{5.60}$$

то при $n > 1$ из равенства (5.57) получим

$$\begin{aligned}
 x_n &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < \\
 &< 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 3
 \end{aligned}$$

(мы заменили сумму конечной геометрической прогрессии суммой бесконечной геометрической прогрессии, так как у последней проще формула). Итак,

$$x_n < 3, \tag{5.61}$$

т.е. последовательность (5.56) ограничена сверху. Из (5.58) и (5.61) следует, что она имеет конечный предел. Он обозначается через e :

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{5.62}$$

Поскольку $2 < x_n < 3$ и $x_n \uparrow$, то $2 < e \leq 3$. Можно показать, что e — иррациональное число и что с точностью до 10^{-15}

$$e \approx 2,718\,281\,828\,459\,045.$$

5.8. Принцип компактности Если дана последовательность $\{x_n\}$ и из некоторых ее членов x_{n_k} , взятых в порядке возрастания номеров n_k ($k > k'$ равносильно $n_k > n_{k'}$), составлена новая последовательность $\{x_{n_k}\}$, то она называется *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$.

В подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ k является номером члена этой последовательности, а n_k — его номером в исходной последовательности. Ясно, что для всех $k = 1, 2, \dots$ имеет место неравенство $n_k \geq k$, и поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$.

Подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ считаются различными, если они соответствуют различным наборам номеров $\{n_k\}$. Различные подпоследовательности одной и той же последовательности, рассматриваемые как последовательности, могут оказаться одинаковыми. Так, последовательность $x_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, как и любая последовательность, имеет бесконечно много различных подпоследовательностей (можно, например, выбрать четные номера, нечетные, кратные трём, четырём и т.д.), но все эти подпоследовательности как последовательности совпадают, очевидно, с данной последовательностью $x_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$.

Выше было показано (см. п. 5.4), что если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена. Обратное, конечно, неверно. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$, ограничена, но не имеет предела. Вместе с тем, если вся ограниченная последовательность не имеет предела, то у неё всегда существует подпоследовательность, которая имеет предел. Точнее, имеет место следующий факт.

Т е о р е м а 4. Из любой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а из любой неограниченной сверху (неограниченной снизу) числовой последовательности — последовательность, имеющую своим пределом $+\infty$ (соответственно $-\infty$).

▷ Рассмотрим сначала случай, когда последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т.е. существуют такие $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$, что для всех номеров n выполняется неравенство $ax_n \leq b$.

Разделим отрезок $[a, b]$ на два равных отрезка точкой $\frac{a+b}{2}$. Тогда по крайней мере на одном из них — обозначим его $[a_1, b_1]$ — окажется бесконечно много членов последовательности. Выберем произвольно какой-либо член этой последовательности, содержащийся в отрезке $[a_1, b_1]$. Пусть его номер равен n_1 :

$$x_{n_1} \in [a_1, b_1], \quad b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}. \quad (5.63)$$

Снова разделим отрезок $[a_1, b_1]$ на два равных отрезка и тот из них, на котором лежит бесконечно много членов последовательности (по крайней мере для одного из них это условие выполняется), обозначим $[a_2, b_2]$. Поскольку на отрезке $[a_2, b_2]$ лежит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, то среди них заведомо есть члены с номерами, большими чем n_1 . Выберем один из таких членов. Если его номер n_2 , то

$$x_{n_2} \in [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1], \quad n_2 > n_1. \quad (5.64)$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{2^2}. \quad (5.65)$$

Продолжая этот процесс, получим такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ (т.е. $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$) последовательности $\{x_n\}$, что

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k, \quad (5.66)$$

$$[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}], \quad (5.67)$$

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.68)$$

и следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^k} = 0$.

Задание 3

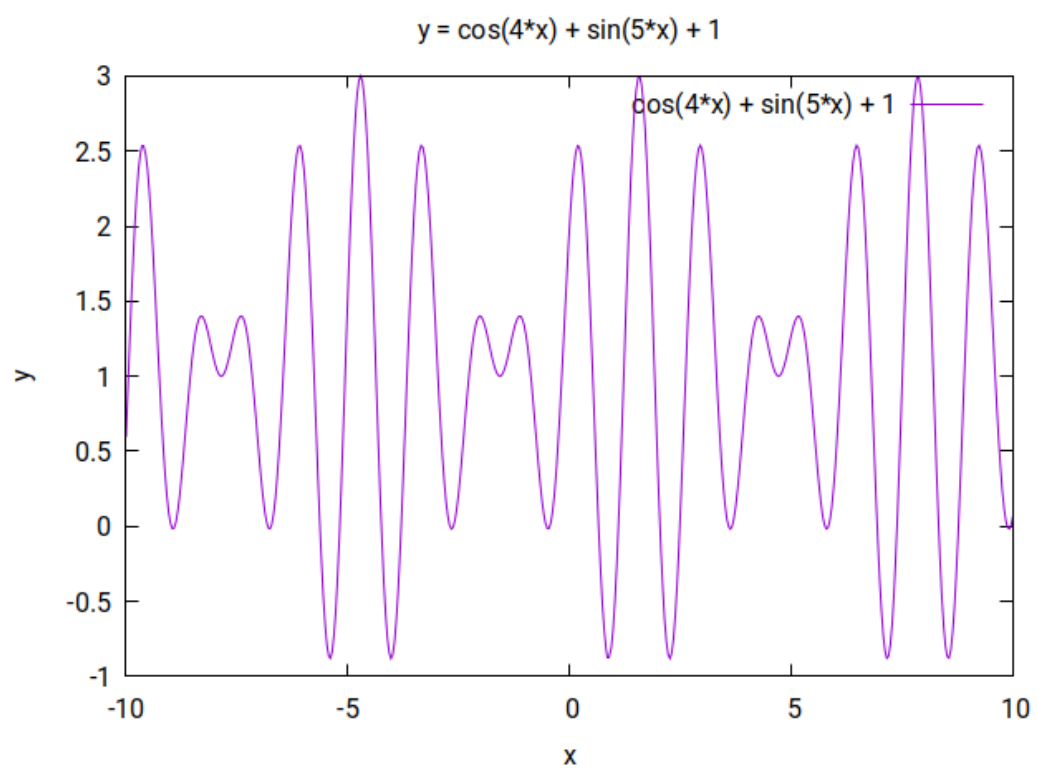


Рис. 1: График функции $y = \sin(5 * x) + \cos(4 * x) + 1$