

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:

Даниил П. А. 22103 #

подпись

Руководитель практики:

к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	6

1 Описание работы

В рамках учебной практики были выполнены два задания, направленные на освоение компьютерных технологий, применяемых в математике. Первое задание заключалось в наборе математического текста с использованием системы верстки LaTeX. Текст, предоставленный преподавателем, содержал сложные математические выражения, включая формулы, определения и теоремы. Для его оформления были изучены основные команды LaTeX, такие как окружения `equation` для нумерованных формул, `definition` для определений и `theorem` для теорем. Особое внимание уделялось корректному отображению специальных символов и структурированию текста. В результате был создан документ в формате PDF с аккуратно оформленными математическими выражениями и логичной компоновкой материала.

Второе задание предполагало построение графика функции с помощью программы `gnuplot`. Требовалось придумать функцию и визуализировать. В итоге нужно было сохранить график функции в файл формата `png` или `pdf` и вставить в текст второго задания. В процессе работы над этим заданием были изучены возможности `gnuplot`, благодаря скринкастам удалось полностью разобраться с данной средой.

Оба задания позволили приобрести практические навыки работы с инструментами, широко используемыми в научной и образовательной деятельности. LaTeX продемонстрировал свою эффективность для верстки сложных математических текстов, а `gnuplot` — для точной визуализации функций. Выполненные работы подтвердили важность владения этими технологиями для меня, вероятно я продолжу их использовать в своих работах.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

При помощи n числовых функций $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, называемых координатными и являющихся координатами точки $x(t)$, т. е.

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Отображение называется непрерывным на отрезке, если на нем непрерывны все координатные функции этого отображения.

О п р е д е л е н и е 22. *Непрерывное отображение отрезка в n -мерное пространство называется кривой в этом пространстве, а образ отрезка — носителем кривой.*

Как и в трехмерном случае, будем обозначать кривую буквой Γ и писать

$$\Gamma = \{x(t); a \leq t \leq b\} \quad (33.47)$$

или

$$\Gamma = \{x_i(t); i = 1, 2, \dots, n; a \leq t \leq b\}.$$

Для кривой (33.47) всякая пара (x, t) , $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [a, b]$, для которой $x = x(t)$, называется точкой кривой и там, где это не может привести к недоразумениям, обозначается $x(t)$. Точка кривой $x(a)$ называется ее началом, а точка $x(b)$ — концом.

О п р е д е л е н и е 23. *Множество точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых представимы в виде*

$$x_i = x_i^{(0)} + a_i t, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad -\infty < t < +\infty, \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0, \quad (33.48)$$

называется прямой в пространстве $\mathbb{R}^n$, проходящей через точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ в направлении вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Если $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ рассматривать как векторы, то уравнения (23) можно записать в векторном виде

$$x = x^{(0)} + at, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (33.49)$$

Сужение этого отображения на множество $t > 0$ или на $t \geq 0$ (соответственно на $t < 0$ или $t \leq 0$) называется открытым или замкнутым лучом с началом в точке $x^{(0)}$ в направлении вектора a (соответственно $-a$).

Вектор a называется направляющим вектором прямой $x = x^{(0)} + at$. Две несовпадающие прямые, уравнения которых можно записать с одним и тем же направляющим вектором, называются параллельными.

Сужение отображения (33.48) на какой-либо отрезок $[a, b]$, т. е. кривую $\{x_i = a_i + b_i t, i = 1, 2, \dots, n; a \leq t \leq b\}$, так же, как и носитель этой кривой, называется отрезком прямой в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Отрезок прямой, началом которого является $x(a)$, а концом $x(b)$, обозначается $[x(a), x(b)]$.

Пример 3. Рассмотрим замкнутый n -мерный куб

$$Q^n = \{x : |x_i - x_i^{(0)}| \leq a, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Для всякого фиксированного i_0 (i_0 может принимать значения $1, 2, \dots, n$) множество вида

$$\{x : |x_{i_0} - x_{i_0}^{(0)}| \leq a, x_i = x_i^{(0)} \pm a, i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_0\}\},$$

где при каждом $i \neq i_0$ в равенстве $x_i = x_i^{(0)} \pm a$ выбран один из знаков, плюс или минус, является отрезком в пространстве $\mathbb{R}^n$ (эти отрезки называются рёбрами куба Q^n). В самом деле, координаты точек рассматриваемого множества могут быть заданы формулами

$$x_{i_0} = x_{i_0}^{(0)} + at, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad x_i = x_i^{(0)} \pm a, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_0\}.$$

Будем говорить, что две точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ множества $X \subset \mathbb{R}^n$ можно соединить в этом множестве кривой, если существует такая кривая (33.47), что $x(a) = x^{(1)}$, $x(b) = x^{(2)}$ и её носитель лежит в множестве X .

Определение 24. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$, любые две точки которого можно соединить в нём кривой, называется линейно связным множеством.

Линейно связное открытое множество называется областью. Замыкание области называется замкнутой областью.

Определение 25. Множество, любые две точки которого можно соединить отрезком, лежащим в этом множестве, называется выпуклым.

Очевидно, что всякое выпуклое множество является и линейно связным.

Пример 4. Открытый шар в $\mathbb{R}^n$ является выпуклой областью.

Пример 5. Объединение двух непересекающихся открытых шаров в $\mathbb{R}^n$ является открытым множеством, но не является областью.

Пример 6. Объединение двух пересекающихся, но не совпадающих прямых является примером линейно связного, но не выпуклого множества.

33.4. Компакты. Рассмотрим важный для дальнейшего класс множеств, называемых компактными.

О п р е д е л е н и е 26. Множество, у которого из каждой последовательности его точек можно выделить сходящуюся к точке этого множества подпоследовательность, называется компактом.

Т е о р е м а 4. Для того чтобы множество было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.

Доказательство. Необходимость. Если множество $X \subset \mathbb{R}^n$ является неограниченным, то для любого $m \in \mathbb{N}$ найдётся такая точка $x^{(m)} \in X$, что $\rho(O, x^{(m)}) > m$, $O = (0, 0, \dots, 0)$. Очевидно, что $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = \infty$, а поэтому и для любой подпоследовательности $\{x^{(m_k)}\}$ последовательности $\{x^{(m)}\}$ также имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m_k)} = \infty$. Тем самым из полученной последовательности $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \dots$, нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке множества X . Это означает, что множество X не является компактом. $\square$

Если множество X не является замкнутым множеством, то существует не принадлежащая ему точка прикосновения: $x \in \overline{X} \setminus X$. В силу определения точки прикосновения для любого $m \in \mathbb{N}$ существует точка $x^{(m)} \in X \cap U(x, \frac{1}{m})$. Тогда $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$, и для любой подпоследовательности $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ также имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(m_k)} = x \notin X$. Тем самым из последовательности $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, где $x^{(m)} \in X$, нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке множества X . Это означает, что множество X не является компактом.

Из доказанного следует, что если множество X является компактом, то оно ограниченное и замкнутое.

Т е о р е м а 5. Пусть множество X является ограниченным и замкнутым, а $\{x^{(m)}\}$ — произвольная последовательность его точек. Из ограниченности множества X следует ограниченность последовательности $\{x^{(m)}\}$. Согласно теореме 2 п. 33.2 из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$. Если $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(m_k)} = x$, то в любой окрестности точки x имеются точки последовательности $x^{(m_k)} \in X$, $m = 1, 2, \dots$. Это означает, что точка x является точкой прикосновения множества X , а поэтому в силу замкнутости множества X она в нём содержится. Таким образом, из произвольной последовательности точек множества X можно выделить сходящуюся к его точке подпоследовательность, т. е. множество X является компактом.

Система множеств $X_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) называется *покрытием* множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha. \quad (33.50)$$

Если все множества X_α , $\alpha \in \mathfrak{A}$, являются открытыми, то покрытие $\{X_\alpha\}$ множества X называется *открытым покрытием*.

Т е о р е м а 6. Для любого открытого покрытия компакта существует такое положительное число (называемое числом Лебега данного покрытия), что любое подмножество компакта с диаметром,

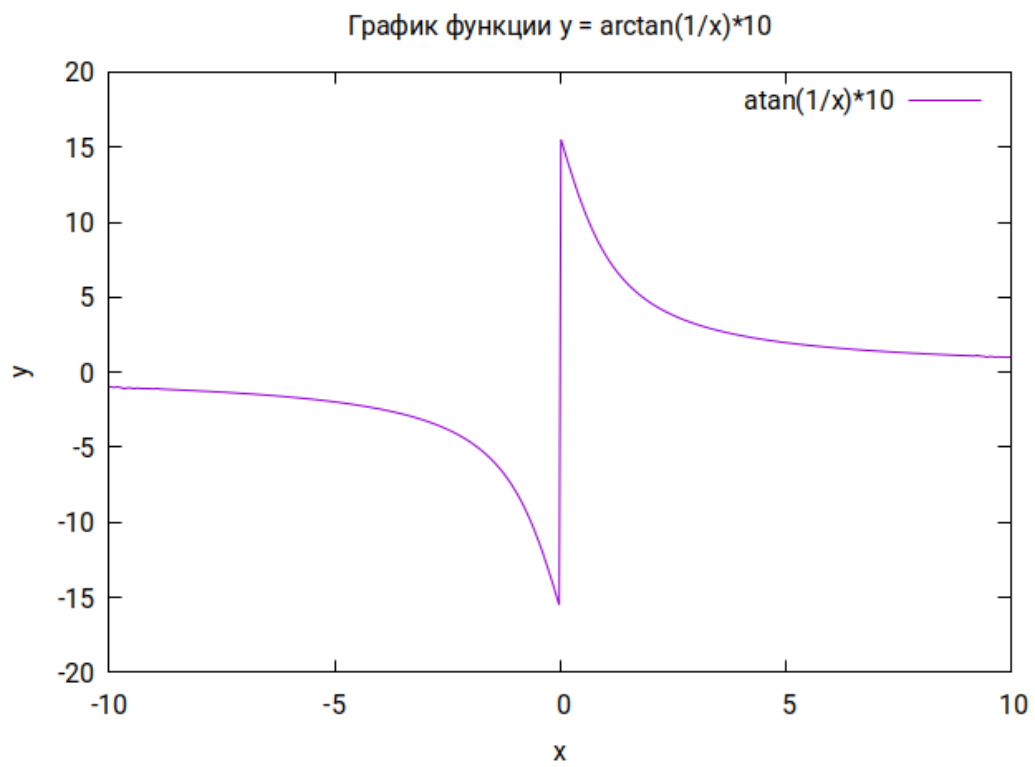


Рис. 1: График функции $y = \arctan(\frac{1}{x}) * 10$

2.2 Задание 3

Результат этого задания представлен в конце 2.