

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчёт по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Моисеев С. Д., группа №22101

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	6

1 Описание работы

LaTeX — наиболее популярный набор макрорасширений системы компьютерной вёрстки TeX, который облегчает набор сложных документов. Во время занятий по учебной практике мне довелось познакомиться с LaTeX и выполнить несколько заданий, которые были направлены на получение некоторых знаний и навыков по работе с ним.

Первое задание являлось знакомством с LaTeX и было ориентировано на ознакомление с базовыми командами преамбулы, умением компилировать файл LaTeX в различные форматы.

Второе задание было самым масштабным, в нем мне нужно было познакомиться с набором математических формул, рубрикацией текста, оформлением новых окружений (теоремы, леммы и др.), использованием некоторых пакетов (amssymb, amsmath и др.).

В третьем задании предлагалось ознакомиться с возможностями программы gnuplot (gnuplot — свободная программа для создания двух- и трёхмерных графиков), а так же с пакетом graphics, который предоставляет удобные инструменты для работы с изображениями (PNG, PDF и др.).

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Глава 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 33. Многомерные пространства

33.1. Определение n -мерного пространства. Если на плоскости $\mathbb{R}^2$ фиксирована прямоугольная система координат, то между точками плоскости и всевозможными парами чисел (x, y) (x и y — координаты точек) существует взаимно однозначное соответствие. Если в пространстве задана аналогичная система координат, то между точками пространства и их координатами — всевозможными тройками (x, y, z) — также существует взаимно однозначное соответствие. С помощью координат точек на плоскости, используя теорему Пифагора, можно выразить расстояние ρ между двумя точками $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$ формулой

$$\rho = \rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (32.1)$$

В пространстве $\mathbb{R}^3$ формула для расстояния ρ между точками $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ имеет аналогичный вид:

$$\rho = \rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (32.2)$$

Пары (x, y) и тройки (x, y, z) чисел можно рассматривать также и как координаты векторов на плоскости и в пространстве. Как известно, различные операции над векторами можно описывать в терминах их координат. Например, координаты линейной комбинации $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$ векторов $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ являются соответствующими линейными комбинациями координат данных векторов:

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2), \quad (32.3)$$

в частности,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \quad (32.4)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2). \quad (32.5)$$

Скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выражается через их координаты следующим образом:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \quad (32.6)$$

а для длины $|\mathbf{a}|$ вектора $\mathbf{a}$ имеет место формула

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \quad (32.7)$$

Из (32.7) видно, что расстояние (32.2) между точками $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ есть не что иное, как длина вектора $\mathbf{a}$ с началом в одной из этих точек и концом в другой, т. е. длина разности (32.5) векторов $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\rho(M_1, M_2) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|. \quad (32.8)$$

Нам понадобится понятие n -мерного пространства (n — натуральное число), элементами x которого являются упорядоченные множества n действительных чисел

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Эти элементы по аналогии с обычным пространством можно рассматривать и как точки, и как векторы (n -мерного пространства). В первом случае для них определяется понятие расстояния, во втором — соответствующие векторные операции.

Линейная комбинация с коэффициентами λ и μ двух элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ по аналогии с формулой (32.3) определяется равенством

$$\lambda x + \mu y \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \dots, \lambda x_n + \mu y_n). \quad (32.9)$$

В частности,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad (32.10)$$

$$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n), \quad (32.11)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n). \quad (32.12)$$

Скалярное произведение элементов x и y определяется равенством

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n. \quad (32.13)$$

Подчеркнем, что в случае $n = 1, 2, 3$ формулы (32.9) и (32.13) доказываются с помощью свойств геометрии трехмерного пространства, а в случае $n > 3$ они принимаются за определение.

Определение 1 Множество всех упорядоченных систем $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n действительных чисел, для которых определены линейные комбинации (32.9) и скалярное произведение (32.13), называется n -мерным арифметическим векторным пространством и обозначается $\mathbb{R}^n$. Его элементы $x = (x_1, \dots, x_n)$ называются векторами, а числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ — их координатами.

Отметим, что для простоты записи векторы в n -мерном пространстве при произвольном n обычно обозначаются светлым шрифтом.

Вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ называется нулевым вектором.

Для любого вектора x вектор $-x \stackrel{\text{def}}{=} (-1)x$ называется противоположным вектору x . Очевидно, что $x + (-x) = \mathbf{0}$.

Скалярное произведение (32.13) векторов пространства $\mathbb{R}^n$ имеет следующие свойства:

1°. Симметричность: $(x, y) = (y, x)$.

2°. Линейность: $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$.

3°. $(x, x) \geq 0$.

4°. Если $(x, x) = 0$, то $x = 0$.

Все это верно для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Свойства (1°- 4°) непосредственно следуют из определения (32.13).

Длина $|x|$ вектора x пространства $\mathbb{R}^n$ по аналогии с формулой (32.7) определяется равенством

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x, x)}, \quad (32.14)$$

следовательно,

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (32.15)$$

Очевидно, что длина $|x|$ вектора x равна нулю тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Длина вектора обладает тем свойством, что для любого числа λ имеет место равенство

$$|\lambda x| = |\lambda| |x|. \quad (32.16)$$

В частности, $|-x| = |x|$.

Лемма 1 Для скалярного произведения векторов $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|(x, y)| \leq |x| |y|. \quad (32.17)$$

Это неравенство называется неравенством Коши–Шварца.*)

Если $x = 0$, то неравенство (32.17) очевидно, так как обе части обращаются в нуль.

Пусть $x \neq 0$. Для любого $t \in \mathbb{R}$ согласно свойству 3 скалярного произведения выполняется неравенство

$$(tx + y, tx + y) \geq 0. \quad (32.18)$$

С другой стороны, в силу 1 и 2

$$(tx + y, tx + y) = (x, x)t^2 + 2t(x, y) + (y, y), \quad (32.19)$$

поэтому

$$(x, x)t^2 + 2t(x, y) + (y, y) \geq 0,$$

где из условия $x \neq 0$ согласно свойству 4 имеем $(x, x) \neq 0$. Но если квадратный трехчлен неотрицателен, то его дискриминант неположителен:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \stackrel{(32.18), (32.19)}{\geq} 0,$$

а это неравенство равносильно неравенству (32.17).

*) Г. Шварц (1843 - 1921) - немецкий математик

2.2 Задание 3

