

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГБОУ ВО «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчёт по учебной практике  
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:  
Коновалова А. Е., группа № 22101

---

*подпись*

Руководитель практики:  
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

---

*подпись*

Итоговая оценка:

---

*оценка*

# Содержание

|          |                          |          |
|----------|--------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Описание работы</b>   | <b>3</b> |
| <b>2</b> | <b>Результаты работы</b> | <b>3</b> |
| 2.1      | Задание 2 . . . . .      | 3        |
| 2.2      | Задание 3 . . . . .      | 5        |

# 1 Описание работы

Задания по учебной практики "Компьютерные технологии в математике" были сосредоточены на подготовке документа в LaTeX с использованием математического текста и интеграции в него графиков, созданных с помощью gnuplot.

Задание 2: Требовалось подготовить документ, содержащий математический текст, предоставленный инструктором, в формате LaTeX. Для этого требовалось изучить написание различных математических формул, ознакомиться со специальными символами. Также важно было изучить рубрикацию текста (разделы, подразделы) и специальные абзацы. И нужно было рассмотреть правильное оформление окружений для теорем и лемм. Основным требованием была автоматическая нумерация разделов и формул.

Задание 3: После создания LaTeX-документа (задание 2), требовалось построить изображение кривой в декартовых координатах, с помощью gnuplot и вставить его в исходный документ из задания 2. Для выполнения данного задания потребовалось освоить работу с gnuplot, то есть научиться задавать функции, разобраться с масштабированием, рассмотреть стили оформления. В заключении создать плавающий объект в LaTeX. Для этого после создания изображения нужно было сохранить его в формате PNG и используя в LaTeX пакет graphicx вставить изображение в документ, оформить его как плавающий объект (figure) с соответствующей подписью.

## 2 Результаты работы

### 2.1 Задание 2

**Лемма 1** Пусть  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены с действительными коэффициентами, причем  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  — правильная рациональная дробь.

Если число  $(z_0 = x_0 + y_0 i, x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}, y_0 \neq 0)$ , является корнем кратности  $m \geq 1$  многочлена  $Q(x)$ , т. е.

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x) \quad (1)$$

где

$$Q_1(z_0) \neq 0, \quad x^2 + px + q = (x - z_0)(x - \bar{z}_0), \quad (2)$$

то существуют такие единственные действительные числа  $B, C$  и многочлен  $P_1(x)$  с действительными коэффициентами, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)}, \quad (3)$$

где дробь

$$\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)} \quad (4)$$

также является правильной.

▷ Для любых действительных  $B$  и  $C$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &\stackrel{(1)}{=} \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} = \\ &= \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} + \left[ \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} - \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} \right] = \\ &= \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P(x) - (Bx + C)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассуждениями, аналогичными проведенным при доказательстве леммы 1, легко убедиться, что дробь

$$\frac{P(x) - (Bx + C)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} \quad (6)$$

является правильной и что коэффициенты многочленов, стоящих у нее в числителе и знаменателе, являются действительными.

Для того чтобы дробь (6) имела вид

$$\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)}, \quad (7)$$

необходимо и достаточно, чтобы ее можно было сократить на множитель  $x^2 + px + q = (x - z_0)(x - \bar{z}_0)$  а это можно сделать тогда и только тогда, когда числитель дроби (6) делится на  $(x - z_0)(x - \bar{z}_0)$ , что согласно теореме Безу равносильно тому, что число  $z_0$  является корнем многочлена, стоящего в числителе дроби (6), т.е. когда

$$P(z_0) - (Bz_0 + C)Q_1(z_0) = 0.$$

Поскольку  $Q_1(z_0) \neq 0$ , то

$$Bz_0 + C = \frac{P(z_0)}{Q_1(z_0)}. \quad (8)$$

Пусть  $\frac{P(z_0)}{Q_1(z_0)} = a + b_i$ . Тогда равенство (8) можно записать следующим образом:

$$B(x_0 + Y_0 i) + C = a + b_i.$$

Приравняв действительные и мнимые части комплексных чисел, стоящих в разных частях этого равенства, получив  $B = \frac{b}{y_0}$ ,  $C = a - \frac{x_0}{y_0}b$ . При таком выборе  $B$  и  $C$  они, во-первых, являются действительными числами, во-вторых, в этом и только в этом случае число  $z_0$ , а следовательно, и сопряженное ему число  $\bar{z}_0$ , являются корнями многочлена (8). При таком и только таком выборе чисел  $B$  и  $C$  дробь (6) сократится на  $(x - z_0)(x - \bar{z}_0)$ . В результате в этом и только этом случае после сокращения дроби (6) получится дробь вида (7). Подставив эту дробь в равенство (5) вместо дроби (6), получим разложение (4), в котором действительные коэффициенты  $B$  и  $C$  однозначно определены.  $\triangleleft$

**Теорема 1** Пусть  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  — правильная рациональная дробь,  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены с действительными коэффициентами. Если

$$Q(x) = \prod_{j=1}^r (x - x_j)^{k_j} \prod_{l=1}^s (x^2 + p_l x + q_l)^{m_l},$$

где  $x_j$  — попарно различные действительные корни многочлена  $Q(x)$  кратности  $k_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , а  $x^2 + p_l x + q_l = (x - z_l)(x - \bar{z}_l)$ , где  $z_l, \bar{z}_l$  — попарно различные существенно комплексные корни многочлена  $Q(x)$  кратности  $m_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, s$ , то существуют единственные действительные числа

$$A_j^{(1)}, A_j^{(2)}, \dots, A_j^{(k_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, r, \\ B_l^{(1)}, B_l^{(2)}, \dots, B_l^{(m_l)}, C_l^{(1)}, C_l^{(2)}, \dots, C_l^{(m_l)}, \quad l = 1, 2, \dots, s,$$

такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{l=1}^r \left( \frac{A_j^{(1)}}{x - x_k} + \frac{A_j^{(2)}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{A_j^{(k_j)}}{(x - x_k)^{k_j}} \right) + \sum_{l=1}^s \left( \frac{B_l^{(1)} + C_l^{(1)}x}{x^2 + p_lx + q_l} + \frac{B_l^{(2)} + C_l^{(2)}x}{(x^2 + p_lx + q_l)^2} + \dots + \frac{B_l^{(m_l)} + C_l^{(m_l)}x}{(x^2 + p_lx + q_l)^{m_l}} \right). \quad (9)$$

▷ Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 1, сначала последовательно применим лемму 1  $k_1$  раз при  $z_0 = x_1$ , затем  $k_2$  раз при  $z_0 = x_2$  и т.д.,  $k_r$  раз при  $z_0 = x_r$ . В результате получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^r \left( \frac{A_j^{(1)}}{x - x_k} + \dots + \frac{A_j^{(k_j)}}{(x - x_k)^{k_j}} \right) + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)}, \quad (10)$$

где действительные числа  $A_j^{(1)}, \dots, A_j^{(k_j)}$  определяются последовательно единственным образом, коэффициенты многочленов  $P^*(x)$ , где действительные числа  $A_j^{(1)}, \dots, A_j^{(k_j)}$  определяются последовательно единственным образом, коэффициенты многочленов  $P^*(x)$ ,  $Q^*(x)$  — действительные числа,  $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$  — правильная рациональная дробь, а

$$Q^*(x) = \prod_{l=1}^s (x^2 + p_lx + q_l)^{m_l}.$$

Применив к дроби  $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$  последовательно лемму 2  $m_1$  раз при  $z_0 = z_1$  затем  $m_2$  раз при  $z_0 = z_2$  и т.д.,  $m_s$  раз при  $z_0 = z_s$ , получим

$$\frac{P^*(x)}{Q^*(x)} = \sum_{l=1}^s \left( \frac{B_l^{(1)} + C_l^{(1)}x}{x^2 + p_lx + q_l} + \dots + \frac{B_l^{(m_l)} + C_l^{(m_l)}x}{(x^2 + p_lx + q_l)^{m_l}} \right).$$

Подставив это выражение для  $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$  в (10), получим доказываемую формулу (9). < Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x - a)^m}, \quad \frac{Bx - C}{(x^2 + qx + q)^n}, \quad \frac{p^2}{4} - q < 0, m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}rb,$$

называются элементарными, поэтому теоремы 1 и 2 называются те-оремами о разложении провильных рациональных дробей на сумму элементарных (соотнететвенно в комплевской и действительной об ластях).

**3.6. Графики рациональных функций.** График всякого мно-гочлена степени и с действительными коэффициентами пересекает ось  $x$  в тех точках, абсциссы которых являются его действительными корнями и тем самым не более чем в  $n$  точках, так как он имеет не более чем  $n$  корней.

Поведение многочлена при неограниченном возрастании или не ограниченном убывании его аргумента зависит от четности степени многочлена и знака при старшем члене. Если  $n$  — четное чис-до и коэффициент при старшем члене многочлена больше нуля, то как при неограниченном возрастании аргумента, так и при неограни-ченном его убывании значения многочлена неограниченно возрастают (рис.15). Если  $n$  — нечетное число, то при положи-тельном кооф фициенте при старшем числе многочлена значения многочлена неограниченно растут при неограниченном возрастании аргумента и

## 2.2 Задание 3

Текст предшествовавший графику 1

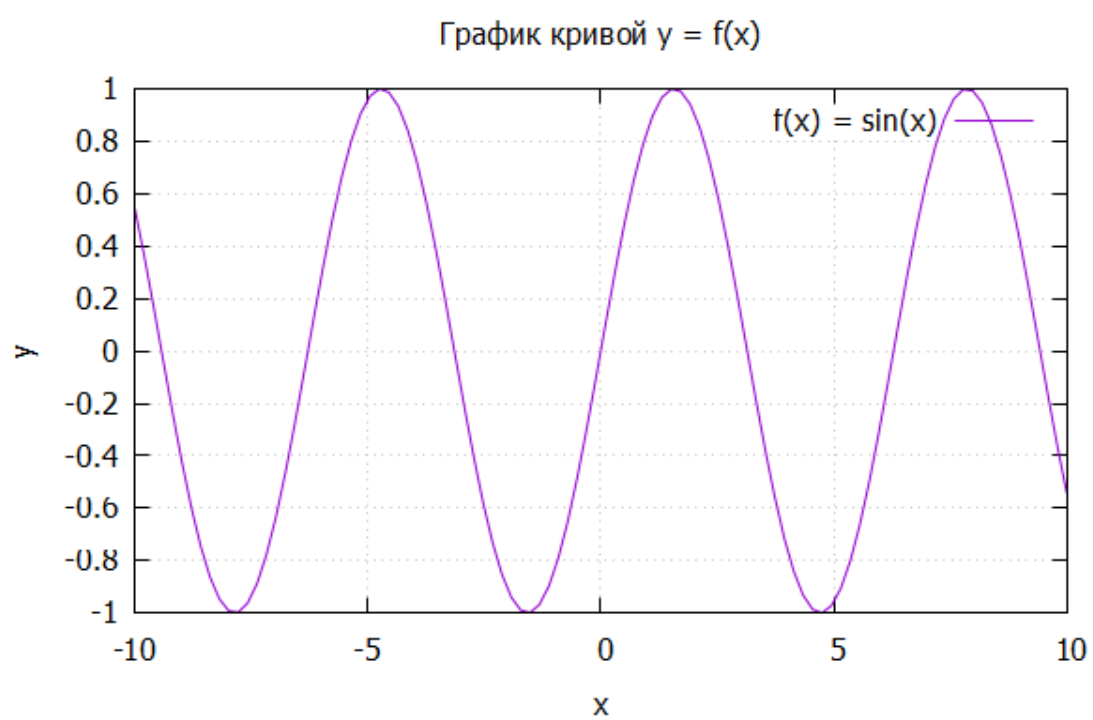


Рис. 1: График кривой