

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Кирютенков К. В. группа 22103#

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	5

1 Описание работы

В ходе учебной практики было выполнено два задания, связанных с применением компьютерных технологий в математике. Первое задание заключалось в наборе математического текста в системе LaTeX. Текст был предоставлен преподавателем и содержал различные математические формулы. Для выполнения задачи был изучен базовый синтаксис LaTeX, включая команды для оформления математических выражений. Текст был успешно отформатирован, были созданы новые окружения, ссылочная форма, формулы корректно отображены, а сам документ сохранен в формате PDF для последующей проверки.

Второе задание предполагало построение графика с помощью программы gnuplot. Требовалось создать график заданной функции, настроить его внешний вид (подписи осей, легенду, диапазон значений) и экспортировать результат в файл изображения. Для этого был изучен синтаксис gnuplot, включая команды plot, set xlabel, set ylabel, set title и другие. После настройки параметров графика он был сохранен в формате PNG и вставлен в итоговый отчет.

Оба задания продемонстрировали практическое применение компьютерных инструментов в математике: LaTeX для оформления сложных математических текстов и gnuplot для визуализации данных. В процессе работы были приобретены навыки работы с этими программами, которые могут быть полезны в дальнейшей учебной и научной деятельности.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Согласно критерию Коши это означает существование конечного предела $\lim_{r \rightarrow x, r \in \mathbb{Q}} a^r$ для всех $x \in \mathbb{R}, a \geq 1$. Этот предел обозначается a^x .

Если $0 < a < 1$, то $b = \frac{1}{a} > 1$, и для любого $x \in \mathbb{R}$ предел

$$\lim_{r \rightarrow x} a^r = \frac{1}{r \in \mathbb{Q}} \cdot \lim_{r \rightarrow x, r \in \mathbb{Q}} b^r$$

также существует. $\triangleleft$

Отметим, что если $x \in \mathbb{Q}$, то определение (8.7) совпадает с уже известным определением рациональной степени a^r числа $a, r \in \mathbb{Q}$. Действительно, в силу доказанного предела $\lim_{r \rightarrow x, r \in \mathbb{Q}} a^r = a^x$ существует и для любой последовательности $r_n \rightarrow x, r_n \in \mathbb{Q}, n = 1, 2, \dots$, равен пределу $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$. В случае $x = r \in \mathbb{Q}$ за указанную последовательность можно взять стационарную последовательность $r_n = r, n = 1, 2, \dots$. Тогда будем иметь

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^r = a^r.$$

Из определения функции a^x следует, что для любого действительного числа x выполняется равенство

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \quad (8.13)$$

Действительно, это равенство имеет место для рациональных значений $x = r \in \mathbb{Q}$, поэтому для любого действительного x получаем

$$a^{-x} = \lim_{(8.7)-r \rightarrow -x} a^{-r} = \lim_{r \rightarrow x} \frac{1}{a^r} = \frac{1}{a^x}.$$

Функция $f(x) = a^x, a > 0, x \in \mathbb{R}$, называется *показательной функцией*.

В случае $a = e$ функция e^x обозначается также $\exp x$ и называется *экспонентой*.

Т е о р е м а 1. Показательная функция $a^x, a > 0$, обладает следующими свойствами.

1° При $a > 1$ она строго возрастает, а при $a < 1$ строго убывает на всей числовой оси.

2° Для любых $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $a^x a^y = a^{x+y}$.

3° Для любых $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $(a^x)^y = a^{xy}$.

4° Функция a^x непрерывна на всей числовой оси.

5° Областью значений функции a^x является множество всех положительных чисел, т. е. бесконечный интервал $(0, +\infty)$.

Доказательство 1°. Пусть для определенности $a > 1$ и $x < y$. Существуют такие рациональные числа r' и r'' , что

$$x < r' < r'' < y.$$

Возьмем последовательности рациональных чисел $r'_n \rightarrow x$ и $r''_n \rightarrow y$ такие, что $r'_n < r' < r'' < r''_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда в силу свойства 1° степеней с рациональными показателями будем иметь

$$a^{r'_n} < a^{r'} < a^{r''} < a^{r''_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n} \leq a^{r'} < a^{r''} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r''_n} = a^y,$$

т. е. при $x < y$ имеет место неравенство $a^x < a^y$.

Отметим, что из 1° и того, что для любого рационального r имеет место неравенство $a^r > 0$, следует, что для любого действительного числа x выполняется неравенство

$$a^x > 0. \quad (8.14)$$

В самом деле, если, например, $a \geq 1$ и $x \in \mathbb{R}$, то, выбрав рациональное число r так, чтобы выполнялось неравенство $r < x$, получим $a^x > a^r > 0$. Аналогично рассматривается случай $0 < a < 1$.

Доказательство 2°. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $r'_n \in \mathbb{Q}$, $r''_n \in \mathbb{Q}$, $r'_n \rightarrow x$, $r''_n \rightarrow y$ и, следовательно, $r'_n + r''_n \rightarrow x + y$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда а

$$a^x a^y = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n} \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r''_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n} a^{r''_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n + r''_n} = a^{x+y}.$$

Доказательство 4°. (свойство 3° будет доказано позже). Покажем, что функция a^x непрерывна на всей числовой оси. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. В силу монотонности функции a^x (см. свойство 1°) существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} a^x \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} a^x.$$

Ясно, что они совпадают соответственно с односторонними пределами

$$\lim_{r \rightarrow x_0 - 0, r \in \mathbb{Q}} a^r \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow x_0 + 0, r \in \mathbb{Q}} a^r$$

сужения функции a^x на множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, из которого удалена точка x_0 , если она рациональная. Эти пределы в свою очередь совпадают с двусторонним пределом

$$\lim_{r \rightarrow x_0, r \in \mathbb{Q}} a^r = a^{x_0}$$

(см. формулу (8.7)). Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} a^x = \lim_{r \rightarrow x_0 - 0, r \in \mathbb{Q}} a^r = a^{x_0} = \lim_{r \rightarrow x_0 + 0, r \in \mathbb{Q}} a^r = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} a^x.$$

В силу равенства односторонних пределов

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} a^x = a^{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} a^x.$$

Согласно теореме 2 из п. 6.6 существует двусторонний предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Отсюда в силу леммы 5 из п. 6.9 следует, что в точке x_0 предел функции a^x существует и без ограничения $x \neq x_0$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}. \quad (8.15)$$

Это и означает, что функция a^x , $x \in \mathbb{R}$, непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Доказательство 3°. Пусть сначала $y = p$ — натуральное число; тогда, применив p раз свойство 2°, получим

$$(a^x)^p = \underbrace{a^x \cdot a^x \cdot \dots \cdot a^x}_{p \text{ раз}} = \overbrace{a^{x+x+\dots+x}}^{p \text{ раз}} = a^{xp}. \quad (8.16)$$

Если $y = 1/q$, где q — натуральное число, то

$$(a^x)^{1/q} = a^{x/q} \quad (8.17)$$

В самом деле, согласно определению корня для доказательства справедливости равенства 8.17) надо показать, что

$$(a^{x/q})^q = a^x,$$

а это равенство сразу следует из свойства (8.16):

$$(a^{x/q})^q = a^{(x/q)q} = a^x. \quad (8.18)$$

Если $y = p/q$, где p и q — натуральные числа, то

$$(a^x)^{p/q} = [(a^x)^p]^{1/q} = (a^{xp})^{1/q} = a^{xp/q} \quad (8.19)$$

Если же $y = -p/q$, то

$$(a^x)^{-p/q} = \frac{1}{(a^x)^{p/q}} \stackrel{(8.13)}{=} \frac{1}{a^{xp/q}} \stackrel{(8.18)}{=} a^{-xp/q}. \quad (8.20)$$

Наконец, при $y = 0$, очевидно,

$$(a^x)^0 = 1 = a^0 = a^{x \cdot 0}. \quad (8.21)$$

Таким образом, для любого рационального числа r справедливо равенство

$$(a^x)^r = a^{x \cdot r}. \quad (8.22)$$

2.2 Задание 3

Результат данного раздania представлен в конце второго.

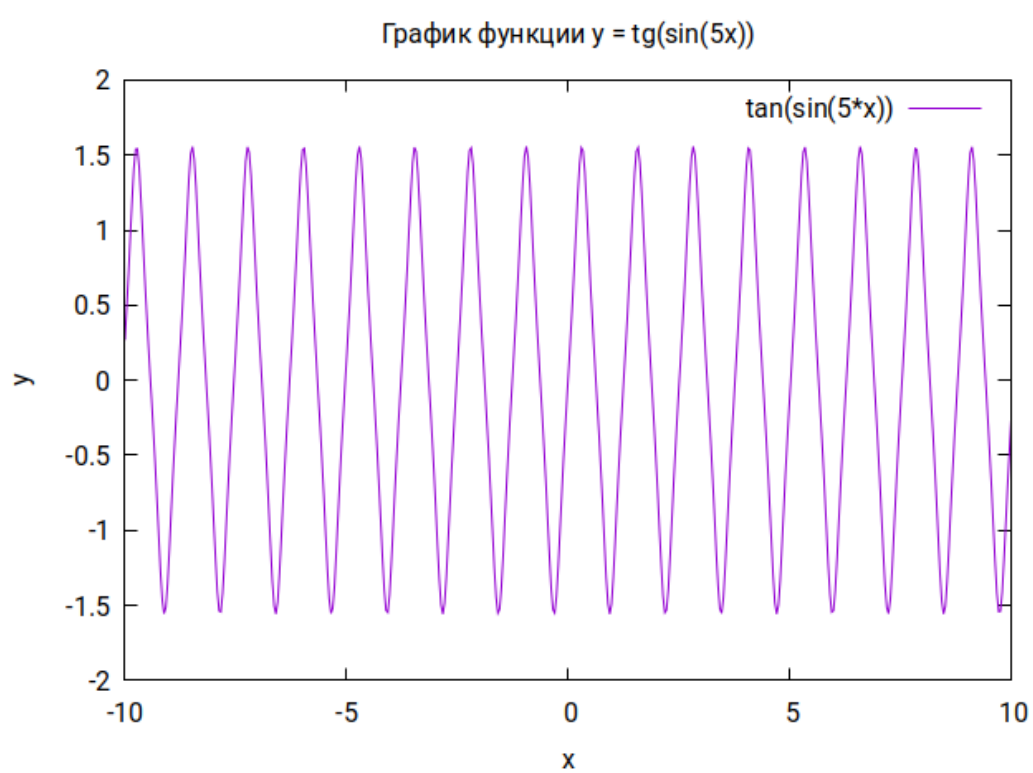


Рис. 1: График функции $y = \operatorname{tg}(\sin(5x))$