

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчёт по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:
Гвачлиани Л.Г. группа 22103

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	5

1 Описание работы

Задание 1: Подготовить документ с математическим текстом и автоматической нумерацией. Главная задача задания: Создать документ с рубрикацией, окружениями (теоремы, леммы) и командами.

Этапы:

1. Настройка окружения, включая необходимые пакеты для математического набора.
2. Ввод математических формул и выражений из предоставленных страниц при помощи информации из первого скринкаста. В нем был показан синтаксис и различные приемы эффективного ввода символов.
3. Организация документа в разделы и подразделы. После просмотра второго скринкаста, где было рассказано о специальных абзацах было необходимо воспользоваться этим на практике для структурирования будущего документа.
4. Создание окружений для теорем, лемм, определений и т.п.
5. Обеспечение автоматической нумерации разделов, подразделов, формул и окружений. Об этом шла речь в третьем скринкасте, который был просмотрен в ходе решения данной задачи.

Задание 2: Построить изображение кривой в декартовых координатах с помощью gnuplot.

Этапы:

1. Освоение работы с gnuplot для построения графика введенной функции. При помощи командного синтаксиса был создан график введенной функции:
2. Вставка графика в конец документа второй лабораторной работы.
3. Изучение информации из скринкастов. В них была показана настройка gnuplot, работа с плавающими объектами, построение различных функций в gnuplot.

Итог: В ходе решения каждой подзадачи было необходимо изучать синтаксис и основы работы интерпретаторов.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

смысле определения 1, и покажем, что тогда число a является и пределом функции в смысле определения 6. Допустим, что это не так, т. е. (см. (6.10)), что существует такая окрестность $U(a)$, что для любой окрестности $U(x_0)$ найдется такая точка $x \in X \cap U(x_0)$, что $f(x) \notin U(a)$, или, в символической записи,

$$\exists U(a) \forall U(x_0) \exists x \in X \cap U(x_0) : f(x) \notin U(a). \quad (6.11)$$

В частности, указанные точки x найдутся в каждой окрестности $U(x_0, 1/n)$, $n = 1, 2, \dots$, точки x_0 . Обозначим эти точки x_n , т. е.

$$x_n \in X \cap U(x_0, 1/n), \quad (6.12)$$

$$f(x_n) \notin U(a). \quad (6.13)$$

Из условия (6.12) следует (см. пример в п. 5.3), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0. \quad (6.14)$$

Поскольку $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ в смысле определения 1, то из выполнения условия (6.14) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$. Следовательно, для любой окрестности $U(a)$, в частности, и для окрестности $U(a)$, указанной в условии (6.13), существует такой номер n_0 , что для всех $n > n_0$ выполняется включение

$$f(x_n) \in U(a), \quad (6.15)$$

что противоречит условию (6.13). В одну сторону утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ в смысле определения 6 предела функции $f : X \rightarrow R, x_0$ - точка прикосновения множества X и $x_n \rightarrow x_0, x_n \in X, n = 1, 2, \dots$. Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$. Зададим произвольно окрестность $U(a)$ точки a и выберем для нее окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , удовлетворяющую условию (6.10). Для окрестности $U(x_0)$ в силу условия $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ существует такой номер n_0 , что для всех $n > n_0$ выполняется включение $x_n \in U(x_0)$, а так как $x_n \in X, n = 1, 2, \dots$, то при $n > n_0$ имеет место включение $f(x_n) \in U(a)$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

Это и означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ в смысле определения 1. $\triangleleft$

6.4. Условие существования предела функции. Согласно определению предела функции (п. 6.1) для того, чтобы существовал предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ функции $f(x), x \in X$, нужно, чтобы для любых последовательностей $x_n \rightarrow x_0, x_n \in X, n = 1, 2, \dots$, существовали пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ и они были равны между собой. То есть, не предполагая равенство этих пределов, а предполагая только их существование, можно доказать их равенство, а следовательно, и существование предела функции. Точнее, докажем следующее утверждение.

Лемма 2 . Для того, чтобы функция $f(x), x \in X$, имела конечный или определенно-го знака бесконечный предел в точке x_0 , являющейся конечной или бесконечно удаленной точкой прикосновения множества X , необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \rightarrow x_0, x_n \in X, n = 1, 2, \dots$, последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$ имела предел (конечный или определенного знака бесконечный).

$\triangleright$ Необходимость сформулированного условия для существования $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ содержится в самом определении предела функции (см. (6.4)), в котором утверждается существование пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ для всех указанных в условиях леммы последовательностей x_n .

Докажем достаточность этого условия для существования предела функции. Пусть $x'_n \rightarrow x_0, x''_n \rightarrow x_0, x'_n \in X, x''_n \in X, n = 1, 2, \dots$, и существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \in \bar{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) \in \bar{R}$. Покажем, что они равны. Положим

$$x_n = \begin{cases} x'_k, & \text{если } n = 2k - 1 \\ x''_k, & \text{если } n = 2k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ и $x_n \in X, n = 1, 2, \dots$. Согласно условиям леммы существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n), \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n), \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n),$$

причем $f(x'_n)$ и $f(x''_n)$ являются подпоследовательностями последовательности $f(x_n)$.

Поскольку из существования у последовательности предела (конечного или бесконечного) следует существование того же предела у любой ее подпоследовательности, то будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$$

Таким образом, пределы последовательностей $f(x_n)$, где $x_n \rightarrow x_0, x_n \in X, n = 1, 2, \dots$, не зависят от выбора указанных последовательностей x_n . Обозначив общее значение пределов последовательностей $f(x_n)$ через a , получим $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. $\triangleleft$

6.5. Предел функции по объединению множеств.

Лемма 3. Пусть функция f задана на объединении $X_1 \cup X_2$ множеств X_1 и X_2 , а x_0 является точкой их прикосновения. Тогда если при $x \rightarrow x_0$ функция f имеет равные пределы по множествам X_1 и X_2 , то она имеет тот же предел и по их объединению.

▷ Если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X_1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X_2}} f(x) = a,$$

то для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , что образы ее пересечений $X_1 \cap U(x_0)$ и $X_2 \cap U(x_0)$ с множествами X_1 и X_2 содержатся в окрестности $U(a)$, а тогда и образ их объединения $(X_1 \cup X_2) \cap U(x_0)$ также содержится в $U(a)$. Это и означает, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X_1 \cup X_2}} f(x) = a. \triangleleft$$

6.6 Односторонние пределы и односторонняя непрерывность. Введем обозначения: для любого числового множества X и любой точки x_0 расширенной числовой прямой $\bar{R}$ Положим

$$X_{+(x_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : x \geq x_0\} \quad X_{-(x_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : x \leq x_0\}.$$

Если $x_0 \in X$, то $x_0 \in X_+$, $x_0 \in X_-$, а если $x_0 \notin X$, то $x_0 \notin X_+$, $x_0 \notin X_-$. Очевидно, если $x_0 = +\infty$, то $X_{+(x_0)} = \emptyset$, а если $x_0 = -\infty$, то $X_{-(x_0)} = \emptyset$

В случае когда множество $X_{+(x_0)}$ (соответственно множество $X_{-(x_0)}$) непусто, условие, что x_0 является его точкой прикосновения, равносильно тому, что $x_0 = \inf X_{+(x_0)}$ (соответственно $x_0 = \sup X_{-(x_0)}$).

Определение 7. Пусть задана функция $f(x), x \in X$ и $x_0 \in \bar{R}$. Точка a называется пределом функции f слева при $x \rightarrow x_0$ (соответственно справа), если она является пределом при $x \rightarrow x_0$ функции f по множеству $X_{-(x_0)}$ (соответственно по множеству $X_{+(x_0)}$), т.е. если $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X_{-(x_0)}}} f(x) = a$ (соответственно $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X_{+(x_0)}}} f(x) = a$).

В силу этого определения предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ причисляется к пределам слева, а $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ - к пределам справа.

Иначе говоря, предел функции f слева в точке x_0 - это предел в этой точке сужения функции f на множество $X_{+(x_0)}$, а предел справа - это предел сужения f на множество $X_{-(x_0)}$.

Для пределов справа и слева сужения функции f на множество $X \setminus \{x_0\}$, т.е. для случая, когда предел берется по множеству, не содержащему точку x_0 , имеются специальные обозначения: для предела справа $f(x_0 - 0)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$, а для предела слева $f(x_0 + 0)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$. При этом в случае $x_0 = 0$ вместо $0 + 0$ и $0 - 0$ пишут $+0$

2.2 Задание 3

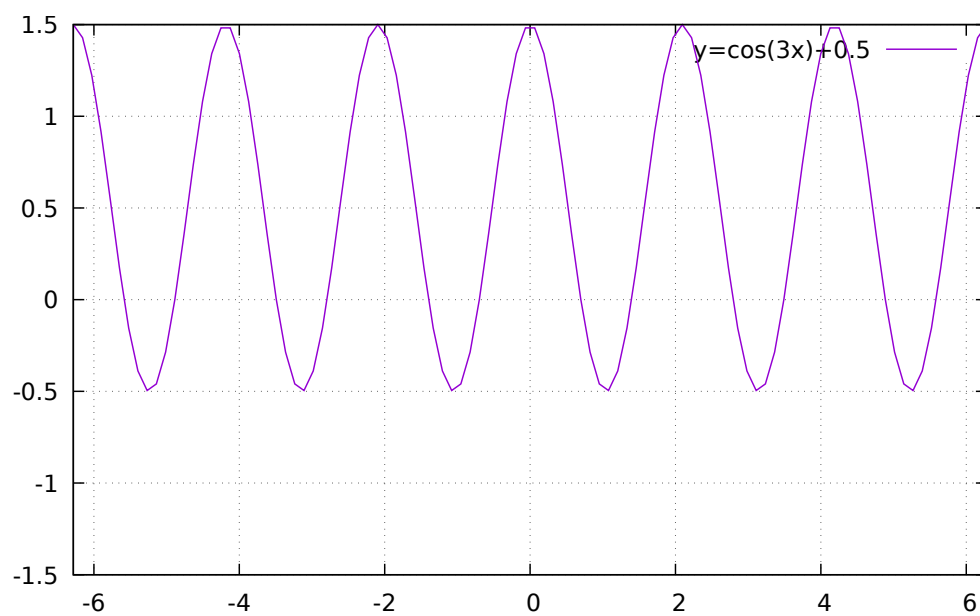


Рис. 1: график функции $y = \cos 3x + 0.5$