

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:
Гичка Е. В. группа 22103#

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	5

1 Описание работы

В рамках учебной практики было выполнено два задания, направленных на освоение компьютерных технологий в математике. Для решения поставленных задач использовался широкий спектр инструментов, в том числе LaTeX для верстки математических текстов и gnuplot для графической визуализации данных. Изучение языка LaTeX происходило посредством просмотра скринкастов, предоставленных преподавателем, и изучения специализированной литературы, посвященной применению LaTeX в математических исследованиях.

Первое задание предполагало создание математического текста в среде LaTeX, включающего формулы, символы и элементы оформления, характерные для научных публикаций. Для успешного выполнения этого задания потребовалось освоить базовый синтаксис LaTeX и научиться работать с математическими выражениями.

Второе задание было посвящено построению графика заданной функции с помощью gnuplot. Задача включала в себя настройку внешнего вида графика (оси, легенда, диапазоны) и сохранение его в виде изображения. В процессе работы был изучен интерфейс gnuplot, а также его возможности по управлению параметрами графического представления данных. Полученное изображение было включено в отчет по первому заданию.

Выполнение обоих заданий позволило приобрести практические навыки работы с инструментами, широко применяемыми в математических исследованиях. LaTeX продемонстрировал свою эффективность при создании сложных математических текстов, а gnuplot показал себя как удобное средство для визуализации данных. Полученные знания и опыт будут полезны при дальнейшей работе над курсовыми и дипломными проектами.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

▷ Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$, то последовательность $\{\beta_n\}$, имея конечный предел, является ограниченной. Поэтому произведение $\{\alpha_n \beta_n\}$ бесконечно малых последовательностей можно рассматривать как произведение бесконечно малой на ограниченную последовательность, и, следовательно, согласно свойству 2° это произведение является бесконечно малой последовательностью.

Соответствующее утверждение для любого конечного числа бесконечно малых последовательностей получается из данного методом математической индукции. ◁

5.6 Свойства пределов, связанные с арифметическими действиями над числовыми последовательностями. Бесконечно малые последовательности играют в теории пределов особую роль, так как понятие конечного предела можно в определенном смысле свести к понятию бесконечно малой. Сформулируем это утверждение в виде леммы.

Лемма 1. Числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, равный числу a , тогда и только тогда, когда последовательность

$$\alpha_n = x_n - a, \quad n = 1, 2, \dots$$

является бесконечно малой:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0. \quad (1)$$

▷ Пусть задана последовательность $\{x_n\}$ и число a . Если $\alpha_n = x_n - a$, то условие $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ согласно определению предела равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε , что для всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, т.е. неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, а это равносильно тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, т.е. тому, что последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая. ◁

Утверждение леммы можно перефразировать следующим образом: число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, тогда и только тогда, когда $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность.

Рассмотрим свойства пределов числовых последовательностей.

1°. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то сходится и последовательность $\{|x_n|\}$, причём если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|. \quad (2)$$

▷ Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε , что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, а поскольку $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$, то выполняется и неравенство

$$||x_n| - |a|| < \varepsilon,$$

а это и означает выполнение равенства (2). ◁

2° Конечная линейная комбинация сходящихся последовательностей также является сходящейся последовательностью, и её предел равен такой же линейной комбинации пределов данных последовательностей.

▷ Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in R, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \in R. \quad (3)$$

Тогда в силу необходимости условий (1) для существования соответствующих конечных пределов члены последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ можно представить в виде

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно малы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0. \quad (5)$$

Пусть теперь λ и μ - какие-либо числа. Тогда члены последовательности $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ представимы в виде

$$\lambda x_n + \mu y_n \underset{(4)}{=} \lambda a + \mu b + \lambda \alpha_n + \mu \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где последовательность $\{\lambda \alpha_n + \mu \beta_n\}$ в силу бесконечной малости последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ также бесконечная малая (см. свойство 1° бесконечно малых последовательностей в п. 5.5):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) \underset{(5)}{=} 0, \quad (7)$$

Поэтому в силу одностаточности условий (1) для существования соответствующего конечного предела из равенств (6) следует, что последовательность $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ имеет предел, равный $\lambda a + \mu b$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda a + \mu b,$$

или (см. (3))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (8)$$

Соответствующее утверждение для любой конечной линейной комбинации сходящихся последовательностей получается из доказанной методом математической индукции. ◁

3° Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то их произведение $\{x_n y_n\}$ также сходится:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad (9)$$

т.е. предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению пределов данных последовательностей.

▷ Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in R, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \in R$; тогда $x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$. Поэтому

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n \beta_n), \quad (10)$$

причем последовательность $\{b\alpha_n + a\beta_n\}$ бесконечно малая как линейная комбинация бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, а последовательность $\{\alpha_n\beta_n\}$ бесконечно малая как произведение тех же последовательностей, поэтому бесконечно малой является их сумма $\{b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n) = 0. \quad (11)$$

Из равенств (10) и (11) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \triangleleft$$

Следствие. Если последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся и m - натуральное число, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^m = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^m.$$

Это непосредственно следует из свойства 3°, так как возведение числа в целую положительную степень m сводится к повторному умножению на это число m раз.

4° Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, для всех номеров n имеет место неравенство $y_n \neq 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ сходится, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n},$$

т.е. при сделанных предположениях предел частного сходящихся последовательностей существует и равен частному от пределов данных последовательностей.

▷ Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in R, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \in R, b \neq 0, y_n \neq 0, n = q, w, \dots$. Тогда $x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$. Из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ согласно свойству 1° следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = |b|$. Поскольку $|b| > 0, b \neq 0$ и $0 < |b|/2 < |b|$, то согласно следствию 1 из свойства 3° пределов последовательностей (п. 5.3) существует такой номер n_0 , что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|y_n| > |b|/2$ и, следовательно, неравенство

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|} \quad (12)$$

(поскольку все $y_n \neq 0$, то на y_n можно делить).

2.2 Задание 3

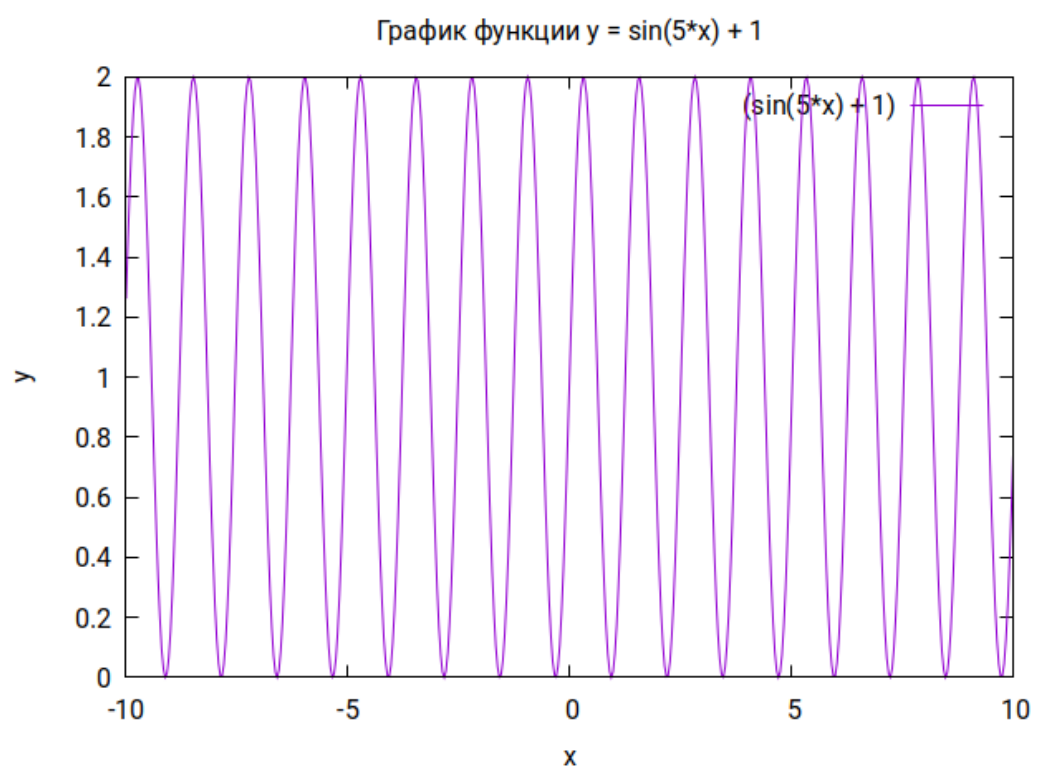


Рис. 1: График функции