

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Бесов Д. Д. группа 22103

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	6

§1 Описание работы

В ходе прохождения “учебной практики: компьютерные технологии в математике” мной были выполнены задания, направленные на освоение современных компьютерных технологий, применяемых в математических исследованиях и публикациях.

Первое задание заключалось в создании математического документа с использованием LaTeX. Мной был переписан предоставленный руководителем текст, включающий математические формулы, определения и теоремы. В процессе работы: были реализованы автоматическая нумерация формул с использованием окружения equation, созданы специализированные окружения для оформления теорем (theorem), определений (definition) и следствий (consequence), настроена система ссылок (команда label и ref) для удобной навигации по документу, разработан единый стиль оформления математических объектов.

Второе задание было посвящено работе с пакетом gnuplot для визуализации математического графика. В рамках этого задания: был выбран и построен график функции, проведена настройка отображения (подписи осей, легенда), реализовано сохранение графика в формате, совместимом с LaTeX, полученное изображение было добавлено в основной документ с использованием окружения figure и команды includegraphics.

В ходе выполнения заданий я использовал знания, полученные из книги "LaTeX для математиков" и скринкастов, предоставленных преподавателем. Полученные навыки помогут мне в будущей учебной деятельности при оформлении различных документов.

§2 Результаты работы

2.1 Задание 2

В силу условия (5.20) существует такой номер n_0 , что для всех номеров $n > n_0$ выполняются включения

$$x_n \in U, \quad y_n \in V, \quad (1)$$

а поэтому согласно (5.23) имеют место неравенства (5.22). $\triangleleft$

С л е д с т в и е 1. Пусть a, b и $x_n, n = 1, 2, \dots$, принадлежат $\overline{R}$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $a < b$ ($a > b$), то существует такой номер n_0 , что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство

$$x_n < b \quad (\text{соответственно } x_n > b). \quad (2)$$

$\triangleright$ Пусть $a < b$. Рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n = b, n = 1, 2, \dots$; тогда для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ выполняются условия (5.20) и (5.21), а следовательно, и условие (5.22), которое в данном случае превращается в (2). Аналогично рассматривается случай $a > b$. $\triangleleft$

С л е д с т в и е 2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, x_n \in \overline{R}, y_n \in \overline{R}, n = 1, 2, \dots, a \in \overline{R}, b \in \overline{R}$, и для всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$x_n \geq y_n, \quad (3)$$

то

$$a \geq b. \quad (4)$$

$\triangleright$ Пусть выполнено условие (3). Если бы оказалось, что $a < b$, согласно свойству 3° нашелся бы такой номер n_0 , что для всех номеров $n > n_0$ выполнялось бы неравенство $x_n < y_n$, что противоречит условию (3). Следовательно, выполняется неравенство (4). $\triangleleft$

Из следствия 2, в частности, вытекает, что если $x_n \geq b, n = 1, 2, \dots$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то имеет место неравенство $a \geq b$.

$\triangleright$ В самом деле, если взять вспомогательную стационарную последовательность $y_n = b, n = 1, 2, \dots$, то для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ будут выполняться условия следств

ия 2, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \overline{R}$, $x_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \dots$, и для всех $n = 1, 2, \dots$, справедливы неравенства

$$x_n \geq b = y_n.$$

Поэтому согласно следствию 2 имеет место и неравенство

$$a \geq b. \triangleleft \quad (5)$$

Следствие 2 означает, что если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, $a \in \overline{R}$, $b \in \overline{R}$, то в неравенствах $x_n > y_n$ и $x_n \geq y_n$ можно переходить к пределу, причем даже в первом случае в результате получается, вообще говоря, нестрогое неравенство

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

П р и м е р. Если для всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется включение $x_n \in U(a, 1/n)$, $x_n \in R$, где либо $a \in R$, либо $a = \infty$, либо $a = +\infty$, либо $a = -\infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

▷ В самом деле, если $a \in R$, то условие $x_n \in U(a, 1/n)$ равносильно условию $|x_n - a| < 1/n$, а так как $|x_n - a| \geq 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, то согласно свойству 2° имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - a| = 0$. Отсюда сразу и следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Если $a = \infty$, то условие $x_n \in U(a, 1/n)$ равносильно условию $|x_n| > n$. Отсюда в силу следствия из свойства 2° имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$. Это и означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Аналогично рассматриваются случаи $a = +\infty$ и $a = -\infty$. $\triangleleft$

В дальнейшем в этом параграфе будут рассматриваться только последовательности, все члены которых являются числами, т. е. только числовые последовательности, а не последовательности элементов расширенной числовой прямой, как это делалось выше.

5.4. Ограниченность сходящихся последовательностей.

О п р е д е л е н и е 5. Числовая последовательность называется *ограниченной сверху (снизу)*, если множество ее значений ограничено сверху (снизу).

Иначе говоря, числовая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу), если существует такое число $c \in R$, что для всех номеров n выполняется неравенство $x_n \leq c$ (соответственно и равенство $x_n \geq c$).

Последовательность, ограниченная как сверху, так и снизу, называется *ограниченной*.

Таким образом, числовая последовательность $\{x_n\}$ ограничена, если существуют такие числа $a \in R$ и $b \in R$, что для всех номеров n выполняется условие $a \leq x_n \leq b$. Это условие, очевидно, равносильно тому, что существует такое число $c > 0$, что для всех номеров n имеет место неравенство

$$|x_n| \leq c.$$

Последовательность, не являющаяся ограниченной сверху (снизу), называется *неограниченной сверху (снизу)*, а последовательность, не являющаяся ограниченной, называется *неограниченной*. Примером неограниченных последовательностей являются бесконечно большие последовательности (см. п. 5.1, определение 3). Следует заметить, однако, что не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой. Так, последовательность

$$x_n = (-1)^n n + n$$

неограниченная, но не бесконечно большая.

Т е о р е м а 2. Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

▷ Пусть последовательность $x_n \in \mathbf{R}, n = 1, 2, \dots$, имеет конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbf{R}$. Тогда согласно определению предела последовательности (см. п. 5.1, определение 1), взяв $\varepsilon = 1$, получим, что существует такой номер n_1 , что для всех номеров $n > n_1$ будет выполняться неравенство

$$|x_n - a| < 1. \quad (6)$$

(в определении предела последовательности можно взять любое $\varepsilon > 0$; мы взяли $\varepsilon = 1$ рис.51). Обозначим через d наибольшее из чисел $1, |x_1 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|$. Тогда, очевидно, в силу условия (6) для всех $n \in \mathbf{N}$ будет иметь место неравенство

$$|x_n - a| \leq d,$$

или, что равносильно,

$$a - d \leq x_n \leq a + d.$$

Это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ◁

5.5. Бесконечно малые последовательности.

Над числовыми последовательностями можно производить арифметические операции. Определим их.

О п р е д е л е н и е 6. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — числовые последовательности. Тогда числовая последовательность $\{x_n + y_n\}$ называется их *суммой* $\{x_n\} + \{y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ — их *разностью* $\{x_n\} - \{y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ — их *произведением* $\{x_n\}\{y_n\}$, а если для всех номеров n выполняется неравенство $y_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ называется *частным* $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ данных последовательностей.

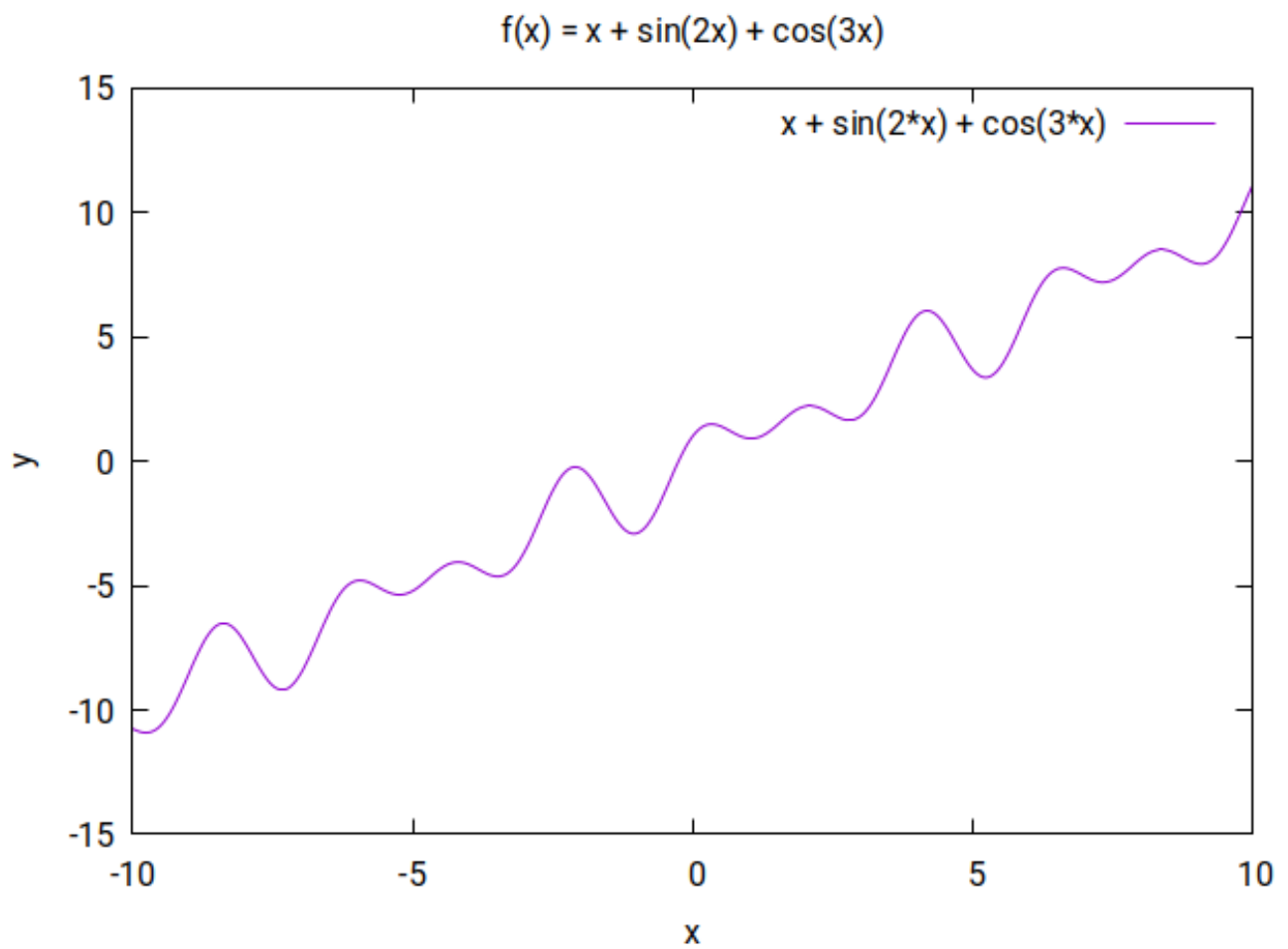
Если λ — действительное число, то *произведением* $\lambda\{x_n\}$ *числовой последовательности* $\{x_n\}$ на число λ называется последовательность $\{\lambda x_n\}$. Таким образом, получается тот же результат, что и от умножения стационарной последовательности $\{\lambda\}$ на последовательность $\{x_n\}$:

$$\lambda\{x_n\} = \{\lambda x_n\} = \{\lambda\}\{x_n\}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Числовая последовательность, предел которой равен нулю, называется *бесконечно малой*.

Рассмотрим свойства бесконечно малых.

1°. Любая конечная линейная комбинация бесконечно малых является бесконечно малой.



2.2 Задание 3

Результат третьего задания представлен в конце второго.