

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Белокуров Ю. М. 22103 #

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	6

1 Описание работы

По дисциплине “учебная практика: компьютерные технологии в математике” мне было предоставлено два задания, которые я успешно выполнил.

В рамках второго задания необходимо было создать документ с математическим содержанием, предоставленным руководителем, с использованием системы вёрстки LaTeX. Основной целью являлось оформление текста с соблюдением требований к математическим публикациям. В ходе выполнения задания был создан структурированный документ, включающий разделы, автоматическую нумерацию формул, перекрёстные ссылки на определения, формулы и другие элементы. Также были разработаны собственные окружения для оформления примеров, определений и других математических объектов, что обеспечило единообразное представление содержания.

Третье задание предусматривало построение графика с помощью интерпретатора команд gnuplot. В качестве примера был выбран конкретный график, соответствующий изучаемой теме. Полученное изображение было сохранено и интегрировано в документ, созданный во втором задании, с использованием окружения figure и команды includegraphics, что обеспечило корректное оформление иллюстративного материала.

Ход выполнения и используемые ресурсы: Во второй задаче, я создал документ с математическим текстом, который предоставил мне мой руководитель, используя LaTeX. Также я добавил раздел, автоматическую нумерацию формул, ссылочную форму для определений, формул и других окружений, и создал новые окружения для примеров, определений и теорем. Для них также был написан отдельный стиль. В третьей задаче я построил выбранный мною график, используя интерпретатор команд gnuplot. Далее, я добавил это изображение в документ (с помощью окружения figure и команды includegraphics), который был создан ранее во второй задаче. В процессе выполнения заданий я использовал учебники из предложенной литературы (Например, LaTeX для математиков) и изучал скринкасты.

При выполнении заданий использовались возможности LaTeX и gnuplot, а также подключались соответствующие пакеты и команды для настройки отображения математических объектов и графических элементов. Для обеспечения корректного оформления документа применялись общепринятые рекомендации и правила составления математических текстов.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Далее выберем отрезок $[a_2, b_2]$, лежащий на $[a_1, b_1]$ и не содержащий точки x_2 , и т.д. Таким образом, если выбран отрезок $[a_n, b_n]$, то выберем отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, лежащий на $[a_n, b_n]$ и не содержащий точки x_{n+1} . Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, такую, что

$$x_n \notin [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

Следовательно, ни одна точка x_n не принадлежит пересечению $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, но согласно принципу вложенных отрезков (см. п. 4.5, теорема 3) существует точка, обозначим её ξ , принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$:

$$\xi \in [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.29)$$

а поэтому и отрезку $[a, b]$, ибо $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ при всех $n = 1, 2, \dots$. А так как все точки отрезка $[a, b]$ по предположению перенумерованы, то точка ξ также должна иметь какой-то номер, т.е. существует такое натуральное число n_0 , что $\xi = x_{n_0}$, и тогда согласно (4.29) получим

$$x_{n_0} \in [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

В частности, $x_{n_0} \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, а это противоречит условию (4.28). $\triangleleft$

Т е о р е м а 6 (Кантор*). *Множество всех действительных чисел несчётно.*

▷ Если бы множество всех действительных чисел было счётным, согласно лемме 2, и любое его подмножество, в частности, любой отрезок, тоже противоречило бы лемме 3. $\triangleleft$

§5. Предел числовой последовательности

5.1. Определение предела числовой последовательности.

Одним из важнейших понятий математического анализа является понятие предела. Начнем его изучение с предела числовой последовательности действительных чисел. Напомним (см. п. 4.6*, пример 5), что последовательностью $\{x_n\}$ элементов некоего множества X называется отображение множества натуральных чисел в это множество X . Образ при этом отображении натурального числа n (член последовательности с номером n) в множестве X обозначается через x_n . В частности, последовательностью действительных чисел является "занумерованное" натуральными числами множество $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ действительных чисел, причем члены последовательности с разными номерами могут иметь одно и то же значение. Примерами последовательности являются $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}, \dots$, или $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$. В дальнейшем в этом параграфе буквой n всегда обозначаются натуральные числа.

Под бесконечно удаленной точкой числовой прямой будем понимать одну из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$ или ∞ (см. п. 2.2).

О п р е д е л е н и е 1. Конечная или бесконечно удаленная точка числовой прямой называется *пределом* некоторой числовой последовательности действительных чисел, если какова бы ни была окрестность точки a , она содержит все члены рассматриваемой последовательности, начиная с некоторого номера.

Этот номер зависит, вообще говоря, от выбора окрестности точки a . Сформулированное условие равносильно тому, что вне любой окрестности точки a находится лишь конечное число членов рассматриваемой последовательности. Вспомнив, что окрестности конечных и бесконечно удаленных точек числовой прямой определяются заданием некоторого числа $\varepsilon > 0$ (п. 2.2), определение предела последовательности действительных чисел можно перефразировать следующим образом.

Точка a (конечная или бесконечно удаленная) числовой прямой называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε , что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ члены x_n содержатся в окрестности $U(a; \varepsilon)$:

$$x_n \in U(a; \varepsilon), \quad n > n_\varepsilon. \quad (5.1)$$

Если выполняется это условие, то пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ или $x_n \rightarrow a$, при $n \rightarrow \infty$ (а иногда пишут $x_n \rightarrow a, n = 1, 2, \dots$) и говорят, что члены последовательности $\{x_n\}$ стремятся к a .

С помощью логических символов существования и всеобщности определение предела записывается следующим образом:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon x_n \in U(a; \varepsilon) \quad (5.2)$$

Если предел последовательности действительных чисел является конечной точкой числовой прямой, т.е. числом, то говорят, что последовательность *имеет конечный предел*.

О п р е д е л е н и е 2. Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она называется *сходящейся*.

Для случая конечного предела определение 1 предела можно перефразировать следующим образом.

Число a является пределом последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε , что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (5.3)$$

В логических символах эта формулировка выглядит следующим образом:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n'_\varepsilon :: |x_n - a| < \varepsilon \quad (5.4)$$

Очевидно, что неравенство (5.3) равносильно неравенству

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \quad (5.5)$$

Аналогичным образом формулируются и определения предела числовой последовательности в случае, когда этот предел является той или иной бесконечно удалённой точкой (или, как говорят, равен бесконечности).

Например, согласно определению (5.2), ∞ является пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε , что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется включение

$$x_n \in U(0, \varepsilon), \quad (5.6)$$

или, что то же самое, неравенство

$$|x_n| > 1/\varepsilon. \quad (5.7)$$

В логических символах это утверждение записывается следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon : |x_n| > 1/\varepsilon. \quad (5.8)$$

Аналогичным образом определение предела последовательности переформулируется для случая, когда этот предел бесконечности со знаком. Для краткости ограничимся записью этих определений только с помощью логических символов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \quad \forall n > n_\varepsilon, \quad x_n > 1/\varepsilon.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \quad \forall n > n_\varepsilon, \quad x_n < -1/\varepsilon.$$

Заметим, что если ε — произвольно положительное число, то $1/\varepsilon$ — также произвольно положительное число.

Очевидно, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

О п р е д е л е н и е 3. Последовательность, пределом которой является бесконечность (со знаком или без знака), называется *бесконечно большой*.

П р и м е р ы 1. Последовательность $x_n = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, сходится и имеет своим пределом нуль. Действительно, так как $1/n$ принимает только положительные значения при любом натуральном n , выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда для всех натуральных $n > n_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

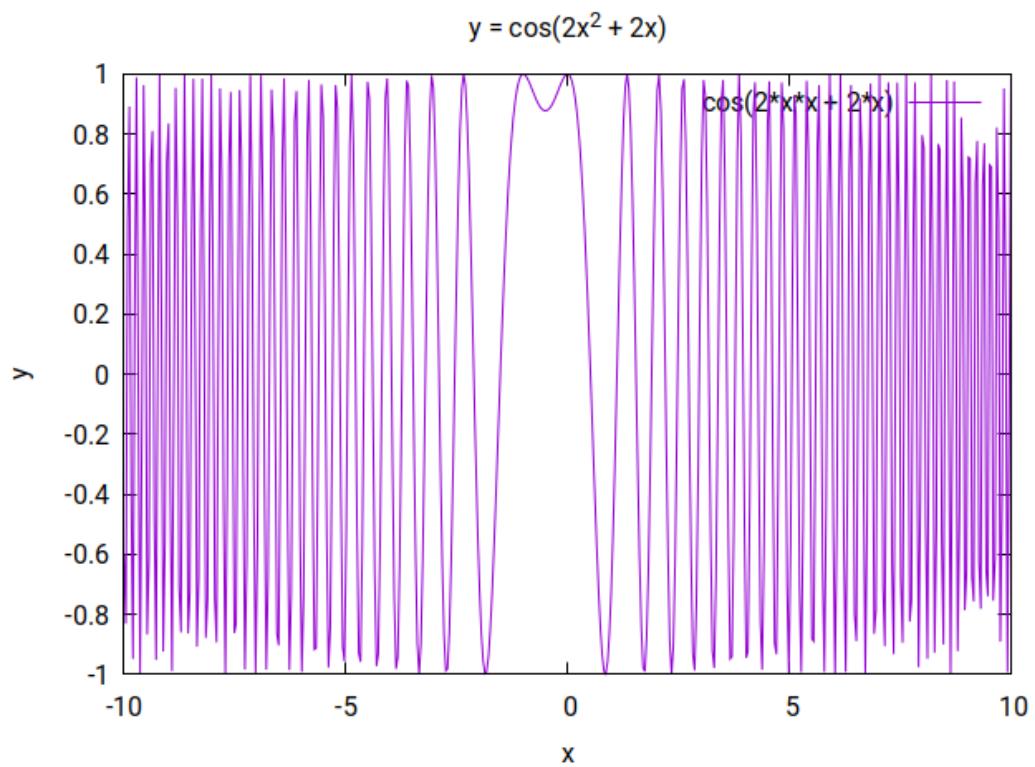


Рис. 1: График функции $y = \cos(2x^2 + 2x)$

2.2 Задание 3

Результат данного задания представлен в конце 2 задания.