

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчёт по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Белоградов А. А., группа №22101

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
11.2	Задание 3	6

1 Описание работы

В ходе учебной практики я познакомился с системами LaTeX и Gnuplot, предназначенными для оформления научных документов и построения графиков.

В первом задании я познакомился с базовыми возможностями LaTeX и научился компилировать документы разные форматы.

Во втором задании мне предстояло научиться создавать математические формулы в LaTeX, научиться оформлять леммы и теоремы с помощью специальных пакетов, а также нумеровать и сделать автоматические ссылки на них.

В третьем задании я освоил работу с Gnuplot, где я научился строить двухмерные и трёхмерные графики, настраивать оси, легенды и стили линий, а также экспортировать результаты в формат pdf, совместимые с LaTeX, для последующей вставки в документ.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

$$\begin{aligned} &= C_n^0 y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + C_n^1 y_1^{(n)} y_2^{(1)} + \dots + C_n^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \dots + C_n^m y_1^{(1)} y_2^{(n)} + \\ &\quad + C_n^0 y_1^{(n)} y_2^{(1)} + \dots + C_n^{k-1} y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \dots + C_n^m y_1^{(0)} y_2^{(n+1)} = \\ &\quad = C_n^0 y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + (C_n^1 + C_n^0) y_1^{(n)} y_2^{(1)} + \dots \\ &\quad \dots + (C_n^k + C_n^{k-1}) y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \dots + C_n^m y_1^{(0)} y_2^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Вспомнив, что (см. п. 2.4)

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \quad C_n^0 = C_n^m = C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{m+1} = 1,$$

получим

$$\begin{aligned} (y_1 y_2)^{(n+1)} &= C_{n+1}^0 y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + \dots + C_{n+1}^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \dots \\ &\quad \dots + C_{n+1}^{n+1} y_1^{(0)} y_2^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)}. \end{aligned}$$

11.2. Производные высших порядков сложных функций, обратных функций и функций, заданных параметрически. С помощью формулы производной сложной функции (см. п. 10.7) можно вычислять и производные высших порядков сложной функции. Пусть функция $y = y(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 , а функция $z = z(y)$ дважды дифференцируема в точке $y_0 = y(x_0)$ и имеет смысл сложная функция $z = z(y(x))$. Вычислим вторую производную z'' сложной функции $z = z(y(x))$ (для простоты записи аргумент писать не будем):

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (z'_y)'_x y'_x + z'_y (y'_x)'_x = (z'_y)'_x y'_x y'_x + z'_y y''_{xx} = z''_{yy} y'^2_x + z'_y y''_{xx}. \quad (11.8)$$

Аналогично вычисляются и производные более высоких порядков.

С помощью формул производных обратной функции (см. п. 10.6) и сложной функции (см. п. 10.7) можно вычислять производные высших порядков обратных функций. Вычислим, например, вторую производную. Пусть функция $y = y(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 , а в ее окрестности непрерывна и строго монотонна, причем $y'(x_0) \neq 0$. Тогда для второй производной x''_{yy} имеем в точке $y_0 = y(x_0)$

$$x''_{yy} = (x'_y)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x x'_y = -\frac{y''_{xx}}{y'^2_x} \cdot \frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{y'^3_x}.$$

Рассмотрим теперь параметрическое задание функций. Пусть на некотором множестве E задана пара функций

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (11.9)$$

причем одна из них, например, $x = x(t)$, строго монотонна на этом множестве и, следовательно, существует обратная функция $t = t(x)$,

для которой E является множеством значений. Тогда функция $y = y(t(x))$ называется параметрически заданной функцией (уравнениями (11.9)). Она определена на множестве значений функции $x(t)$.

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 , функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна в окрестности этой точки и $x'(t_0) \neq 0$, то функция $y(t(x))$ дифференцируема в точке $x_0 = x(t_0)$, причем

$$y'_x = y'_t t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad (11.10)$$

ибо $t'_x = 1/x'_t$.

Аналогично вычисляются и производные высших порядков. Например, если функции (11.9) дважды дифференцируемы в точке t_0 и $x'(t_0) \neq 0$, то

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x t'_x = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}.$$

Выведенные здесь формулы не предназначены для запоминания. Достаточно усвоить метод их получения.

11.3. Дифференциалы высших порядков. Дифференциал от дифференциала первого порядка

$$dy = f'(x)dx \quad (11.11)$$

функции $y = f(x)$, рассматриваемого только как функция переменной x (т. е. приращение dx аргумента x предполагается постоянным), при условии, что повторное приращение независимой переменной x совпадает с первоначальным, называется вторым дифференциалом $d^2 f(x)$ функции f в данной точке x . Таким образом,

$$d^2 f(x) \stackrel{\text{def}}{=} d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dx dx.$$

Вместо $dx dx$ пишут dx^2 :

$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2,$$

или

$$d^2y = y''dx^2, \quad (11.12)$$

откуда $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично, дифференциалом n -го порядка, $n = 2, 3, \dots$, называется дифференциал от дифференциала порядка $n - 1$ при условии, что в дифференциалах все время берутся одни и те же приращения dx независимой переменной x :

$$d^n y \stackrel{\text{def}}{=} d(d^{n-1}y). \quad (11.13)$$

При этом оказывается справедливой формула

$$d^n y = y^{(n)} dx^n, \quad (11.14)$$

где $dx^n = (dx)^n$.

Формула (11.14) легко доказывается по индукции: при $n = 1$ она доказана; если она доказана при некотором n , то

$$d^{n+1}y \stackrel{\text{def}}{=} d(d^n y) = d(y^{(n)} dx^n) = d(y^{(n)}) dx^n = y^{(n+1)} dx^{n+1}.$$

Из формулы (11.14) следует, что

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (11.15)$$

В силу формулы (11.14) высказывания «функция имеет в точке n производных» и «функция n раз дифференцируема в этой точке» (т. е. у нее существует дифференциал порядка n) равносильны.

Дифференциалы высших порядков $d^n y$, $n \geq 2$, не обладают свойством инвариантности формы относительно выбора переменных: если, например, $z = z(y)$, $y = y(x)$ — дважды дифференцируемые функции и имеет смысл композиция $z(y(x))$, то

$$dz = z'_y dy,$$

$$d^2z = d(dz) = d(z'_y dy) = dz'_y dy + z'_{yy} dy^2 + z'_y d^2y, \quad (11.16)$$

где, вообще говоря, $d^2y \neq 0$. Заметим, что если обе части формулы (11.16) поделить на dx , то в силу (11.15) получится формула (11.8).

§12. Дифференциальные теоремы о среднем

12.1. Теорема Ферма. Пусть функция f задана на множестве X и $x_0 \in X$. Напомним, что если для всех точек $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ (соответственно неравенство $f(x) \geq f(x_0)$), то говорят, что функция f принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение на множестве X (см. п. 3.1).

Если в неравенстве $f(x) \leq f(x_0)$ (соответственно в неравенстве $f(x) \geq f(x_0)$) заменить при $x \neq x_0$ знак нестрого неравенства на знак строго неравенства, то получится определение точки x_0 , в которой функция f принимает строго наибольшее (строго наименьшее) значение на множестве X .

Теорема 1 (Ферма). Если функция определена в некоторой окрестности точки, принимает в этой точке наибольшее (наименьшее) значение и имеет конечную или определенное знаки бесконечную производную, то эта производная равна нулю.

*)П. Ферма (1601–1665) — французский математик.

11.2 Задание 3

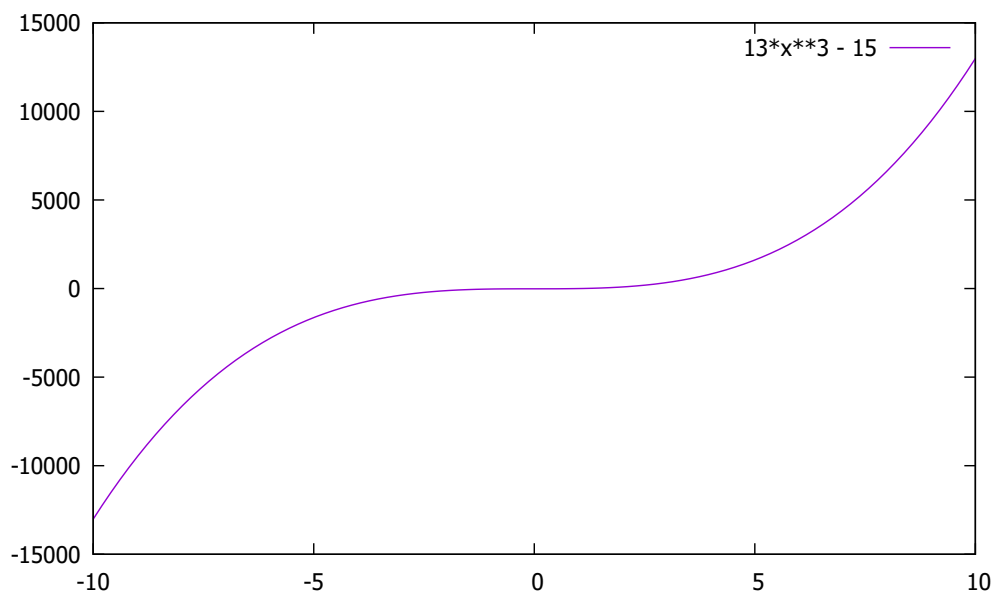


Рис. 1: График