

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:
Беликова В. В. 22103 #

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	5

1 Описание работы

В ходе учебной практики были выполнены два задания, связанные с применением компьютерных технологий в математике. Для выполнения работ использовались различные инструменты, включая LaTeX для набора математических текстов, gnuplot для визуализации данных. Для изучения функционала языка LaTeX были изучены скринкасты (предоставленные преподавателем), а также была прочитана книга LaTeX для математиков.

Первое задание заключалось в наборе математического текста в системе LaTeX. Текст был предоставлен преподавателем и содержал формулы, символы и оформление, характерное для научных работ. Для выполнения задачи потребовалось изучить базовый синтаксис LaTeX, включая математические выражения.

Второе задание было посвящено построению графика с использованием gnuplot. Требовалось создать график заданной функции, настроить его внешний вид (оси, легенду, диапазоны) и сохранить в виде изображения. Для этого использовался интерфейс gnuplot, а также его возможности, позволяющие гибко управлять параметрами графика. Полученное изображение было вставлено в конец первого задания.

Оба задания позволили приобрести практические навыки работы с инструментами, широко применяемыми в математике и научных исследованиях. LaTeX подтвердил свою эффективность для оформления сложных математических текстов, а gnuplot оказался удобным средством визуализации данных. В дальнейшем LaTeX может помочь мне в написании курсовых, дипломных работ.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Арифметической суммой $X_1 + \dots + X_n$ числовых множеств $X_1, \dots, X_n$ называется множество всех чисел x , представимых в виде

$$x = x_1 + \dots + x_n, \quad x_1 \in X_1, \quad \dots, \quad x_n \in X_n.$$

Арифметической разностью $X - Y$ числовых множеств X и Y называется множество всех чисел z , представимых в виде

$$z = x - y, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Следует, конечно, отличать понятие арифметической суммы $X_1 + \dots + X_n$ и разности $X - Y$ от понятия теоретико-множественной суммы $X_1 \cup \dots \cup X_n$ и разности $X \setminus Y$ тех же множеств.

Произведением λX числа λ на числовое множество X называется множество всех чисел вида λx , $x \in X$.

1°

$$\sup (X_1 + \dots + X_n) = \sup X_1 + \dots + \sup X_n \quad (4.3)$$

$$\inf (X_1 + \dots + X_n) = \inf X_1 + \dots + \inf X_n \quad (4.4)$$

▷ Если $x \in X_1 + \dots + X_n$, т.е. $x = x_1 + \dots + x_n$, $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$, то $x_k \leq \sup X_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, и, следовательно,

$$x = x_1 + \dots + x_n \leq \sup X_1 + \dots + \sup X_n. \quad (4.5)$$

Пусть теперь

$$y < \sup X_1 + \dots + \sup X_n. \quad (4.6)$$

Рассмотрим сначала случай, когда все верхние грани $\sup X_k, k = 1, 2, \dots, n$, конечные. В этом случае представим число y в виде $y = y_1 + \dots + y_n$, где

$$y_k < \sup X_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.7)$$

В качестве y_k можно взять

$$y_k \stackrel{\text{def}}{=} \sup X_k - \frac{\varepsilon}{n}, \quad (4.8)$$

где

$$\varepsilon = \sup X_1 + \dots + \sup X_n - y > 0. \quad (4.9)$$

Действительно, в этом случае $y_k < \sup X_k$ и

$$y_1 + \dots + y_n \stackrel{(4.8)}{=} \left(\sup X_1 - \frac{\varepsilon}{n} \right) + \dots + \left(\sup X_n - \frac{\varepsilon}{n} \right) = (\sup X_1 + \dots + \sup X_n) - \varepsilon \stackrel{(4.9)}{=} y.$$

Из неравенств (4.7) следует, что существуют такие $x_k \in X_k$, что

$$y_k < x_k \leq \sup X_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Полагая $x = x_1 + \dots + x_n$, получим

$$x \in X_1 + \dots + X_n, \quad x = x_1 + \dots + x_n > y_1 + \dots + y_n = y. \quad (4.10)$$

Таким образом, выполняются оба условия определения верхней грани (см. (4.5) и (4.10)), т.е. $\sup X_1 + \dots + \sup X_n$ действительно является верхней гранью множества $X_1 + \dots + X_n$.

Пусть теперь хотя бы одна из верхних граней $\sup X_k, k = 1, 2, \dots, n$, бесконечная, т.е. равна $+\infty$, например $\sup X_1 = +\infty$. Докажем, что тогда

$$\sup X_1 + \dots + X_n = +\infty = \sup X_1 + \dots + \sup X_n^*).$$

Пусть задано какое-либо $y \in \mathbb{R}$. Зафиксируем произвольно $x_k \in X_k, k = 2, \dots, n$. Тогда при условии $\sup X_1 = +\infty$ следует, что существует такое $x_1 \in X_1$, что $-1 > y - x_2 - \dots - x_n$, т.е.

$$x \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + x_2 + \dots + x_n > y.$$

Так как y - произвольное число, а $x \in X_1 + \dots + X_n$, то это и означает, что $\sup X_1 + \dots + X_n = +\infty$.

Аналогично доказывается формула (4.4). $\triangleleft$

2°. Если $\lambda > 0$, то

$$\sup \lambda X = \lambda \sup X, \quad (4.11)$$

$$\inf \lambda X = \lambda \inf X, \quad (4.12)$$

а если $\lambda < 0$, то

$$\sup \lambda X = \lambda \inf X, \quad (4.13)$$

$$\inf \lambda X = \lambda \sup X, \quad (4.14)$$

$\triangleright$ Пусть $\lambda > 0$. Если $y \in \lambda X$, т.е. $y = \lambda x$, где $x \in X$ и, следовательно, $x \leq \sup X$, то $y = \lambda x \leq \lambda \sup X$. Если $y < \lambda \sup X$, т.е. $y/\lambda < \sup X$, то найдется такое $x \in X$, что $x > y/\lambda$ и, следовательно, $\lambda x > y$, где $\lambda x \in \lambda X$. Таким образом, $\lambda \sup X$ является верхней гранью множества λX , т.е. формула (4.11) доказана. Аналогично доказывается и формула (4.12).

Пусть теперь $\lambda < 0$. Если $y \in \lambda X$, т.е. $y = \lambda x$, где $x \in X$ и, следовательно, $x \geq \inf X$, то $\lambda x \leq \lambda \inf X$. Если $y < \lambda \inf X$, т.е. $y/\lambda < \inf X$, то найдется такое $x \in X$, что $x < y/\lambda$, а потому $\lambda x > y$, где $\lambda x \in \lambda X$. Это и означает, что $\lambda \inf X$ является верхней гранью множества λX . Равенство (4.13) доказано. Аналогично доказывается равенство (4.14). $\triangleleft$

Положим теперь для каждого множества X

$$-X \stackrel{\text{def}}{=} (-1)X \quad (4.15)$$

Очевидно, что из определения суммы $X + Y$ и разности $X - Y$ множеств существует

$$X - Y = X + (-Y) \quad (4.16)$$

В силу определения (4.15) из второго свойства при $\lambda = -1$ получаем

$$\sup -X = -\inf X, \quad \inf -X = -\sup X \quad (4.17)$$

3°

$$\sup X - Y = \sup X - \inf Y \quad (4.18)$$

Следует сразу и первого свойства и формул (4.16) и (4.17).

4.4 Принцип Архимеда.

Теорема 1. *Каково бы ни было действительно число a , существует такое натуральное число n , что $n > a$.*

▷ Если бы утверждение теоремы не имело места, то нашлось бы такое число a , что для всех натуральных чисел n выполнялось бы неравенство $n \leq a$, т.е. множество всех натуральных чисел N было бы ограничено сверху. Тогда, согласно теореме 1, у множества N существовала бы конечная верхняя грань:

$$\beta = \sup N < +\infty \quad (4.19)$$

Поскольку $\beta - 1 < \beta$, то в силу определения верхней грани (см. свойство 2 в определении 2' в п. 4.2) найдется такое натуральное число n , что $n > \beta - 1$, т.е.

$$n + 1 > \beta, \quad (4.20)$$

но $n+1$ - также натуральное число: $n + 1 \in N$, поэтому неравенство (4.20) противоречит условию (4.19). ◁

Следствие 1. *(принцип Архимеда*). Для любых чисел a и b таких, что $0 < a < b$, существует натуральное число n , для которого выполняется неравенство (рис. 46)*

$$na > b \quad (4.21)$$

▷ Действительно, согласно теореме 2 для числа $\frac{b}{a}$ существует такое натуральное число n , что $n > \frac{b}{a}$, откуда сразу и следует (4.21). ◁

4.5 Принцип вложенных отрезков.

Определение 1. . Система числовых отрезков

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots, \quad a_n \in R, \quad b_n \in R, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.22)$$

называется *системой вложенных отрезков*, если

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1, \quad (4.23)$$

т.е. если (рис. 47)

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

Теорема 2. . *Всякая система вложенных числовых отрезков имеет непустое пересечение.*

2.2 Задание 3

Результат третьего задания представлен в конце второго.

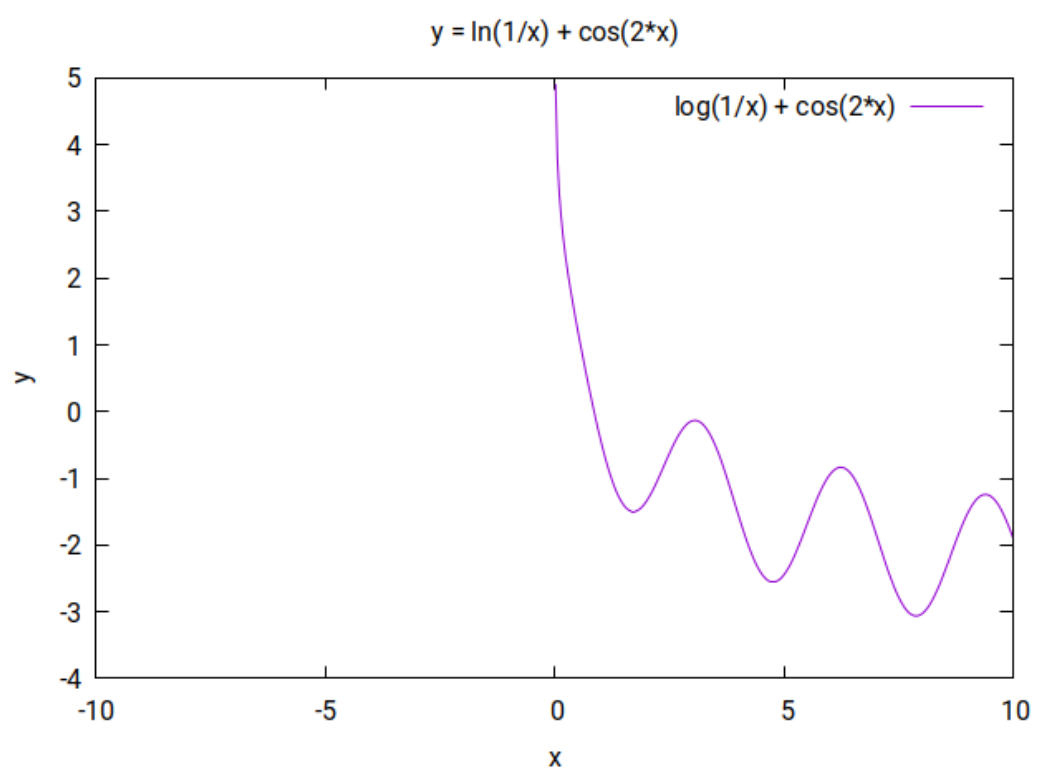


Рис. 1: График функции $\ln(1/x) + \cos(2*x)$