

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Мурадханлы Э.М. №22104

подпись

Руководитель практики:
Александрова К.Р.

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	6

1 Описание работы

По дисциплине “учебная практика: компьютерные технологии в математике” мне было предоставлено два задания, которые я успешно выполнил.

В рамках второго задания необходимо было создать документ с математическим содержанием, предоставленным руководителем, с использованием системы вёрстки LaTeX. Основной целью являлось оформление текста с соблюдением требований к математическим публикациям. В ходе выполнения задания был создан структурированный документ, включающий разделы, автоматическую нумерацию формул, перекрёстные ссылки на определения, формулы и другие элементы. Также были разработаны собственные окружения для оформления примеров, определений и других математических объектов, что обеспечило единообразное представление содержания.

Третье задание предусматривало построение графика с помощью интерпретатора команд gnuplot. В качестве примера был выбран конкретный график, соответствующий изучаемой теме. Полученное изображение было сохранено и интегрировано в документ, созданный во втором задании, с использованием окружения figure и команды includegraphics, что обеспечило корректное оформление иллюстративного материала.

Ход выполнения и используемые ресурсы: Во второй задаче, я создал документ с математическим текстом, который предоставил мне мой руководитель, используя LaTeX. Также я добавил раздел, автоматическую нумерацию формул, ссылочную форму для определений, формул и других окружений, и создал новые окружения для примеров, определений и теорем. Для них также был написан отдельный стиль. В третьей задаче я построил выбранный мною график, используя интерпретатор команд gnuplot. Далее, я добавил это изображение в документ (с помощью окружения figure и команды includegraphics), который был создан ранее во второй задаче. В процессе выполнения заданий я использовал учебники из предложенной литературы (Например, LaTeX для математиков) и изучал скринкасты.

При выполнении заданий использовались возможности LaTeX и gnuplot, а также подключались соответствующие пакеты и команды для настройки отображения математических объектов и графических элементов. Для обеспечения корректного оформления документа применялись общепринятые рекомендации и правила составления математических текстов.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Нижесформулированные и доказанные теоремы называются обычно признаками сравнения сходимости несобственных интегралов.

Теорема 2. Пусть

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow b - 0, \quad (33.11)$$

тогда:

1. если интеграл $\int_a^b g(x) dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x) dx$;
2. если интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^b g(x) dx$.

Доказательство. Пусть интеграл $\int_a^b g(x) dx$ сходится. Из условия (33.11) следует существование такого $\eta_0 \in [a, b)$ и такого $c > 0$, что для всех $x \in [\eta_0, b)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq cg(x) \quad (33.12)$$

(см. п. 8.2). Из сходимости интеграла $\int_a^b g(x) dx$ следует и сходимость интеграла $\int_{\eta_0}^b g(x) dx$. В силу же необходимости условий теоремы 1 для сходимости интеграла, существует такое

число $M > 0$, что для любого $\eta \in [\eta_0, b)$ справедливо неравенство

$$\int_{\eta_0}^b g(x) dx \leq M.$$

Отсюда и из неравенства (33.12) имеем

$$\int_{\eta_0}^b f(x) dx \leq c \int_{\eta_0}^b g(x) dx \leq cM.$$

Из этого неравенства, в силу достаточности условий теоремы 1 для сходимости интеграла от неотрицательной функции, получаем, что интеграл $\int_{\eta_0}^b f(x) dx$, а следовательно, и интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится.

Утверждение 1 теоремы доказано. Докажем второе.

Если интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится, то интеграл $\int_a^b g(x) dx$ не может сходиться: если бы он сходил, то в силу уже доказанного сходил бы и интеграл $\int_a^b f(x) dx$. Таким образом, интеграл $\int_a^b g(x) dx$ расходится.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $g(x) \neq 0$, $a \leq x < b$, и

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad (33.13)$$

тогда:

1. если интеграл $\int_a^b g(x) dx$ сходится и $0 \leq k < +\infty$, то и интеграл $\int_a^b f(x) dx$ также сходится;
2. если интеграл $\int_a^b g(x) dx$ расходится и $0 < k < \infty$, то и интеграл $\int_a^b f(x) dx$ также расходится.

В частности, если $f \sim g$ (см. п. 8.3), то интегралы $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Из выполнения условия (33.13) для $0 \leq k < +\infty$ следует, что существует такое $\delta > 0$, что если $b - \delta < x < b$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} < k + 1, \quad \text{т. е. } f(x) < (k + 1)g(x),$$

а это означает, что

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow b - 0.$$

Поэтому утверждение 1 следствия непосредственно вытекает из утверждения 1 теоремы 2.

Из выполнения условия (33.13) для $0 < k < +\infty$ следует, что для любого $k' \in (0, k)$ существует такое $\delta = \delta(k') > 0$, что если $b - \delta < x < b$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} > k', \quad g(x) < \frac{1}{k'} f(x),$$

а это и означает, что

$$g(x) = O(f(x)), \quad x \rightarrow b - 0.$$

Поэтому утверждение 2 следствия непосредственно вытекает из утверждения 2 теоремы 2.

Функция g в теореме 2 и ее следствии, с помощью которой устанавливается сходимость интеграла $\int_a^b f(x) dx$, называется **функцией сравнения**.

Эффективность использования критерия сравнения для определения сходимости интеграла зависит, конечно, от запаса функций сравнения, о которых известно, сходится от них

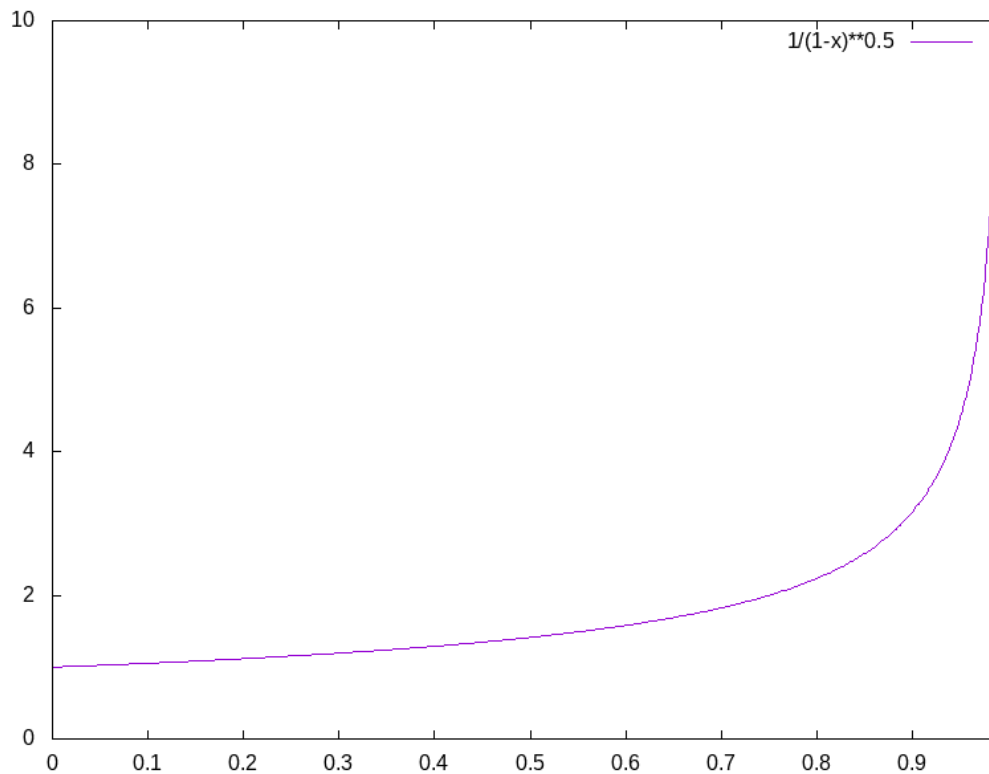


Рис. 1: График функции $g(x) = \frac{1}{(1-x)^\alpha}$ при $\alpha = 0.5$

интеграл или расходится, и которые тем самым можно пытаться использовать для исследования сходимости данного интеграла с помощью признака сравнения.

В качестве простой функции сравнения часто бывает достаточно брать функции вида

$$g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha} \quad (33.14)$$

при различных показателях $\alpha > 0$.

Сходимость интегралов $\int_a^b g(x) dx$ для функций указанного вида проверяется непосредственно:

2.2 Задание 3

Результат данного задания представлен в конце 2 задания.