

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Молчанов М.В. группа 22103

подпись

Руководитель практики:
О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	6

1 Описание работы

В первой лабораторной работе я занимался трансляцией файла под названием «first-example.tex». Моя задача заключалась в получении документа в трех различных форматах: dvi, postscript и pdf. Это был интересный и образовательный процесс, который позволил мне применить и углубить мои знания в LaTeX.

Во второй лабораторной работе я использовал систему компьютерной вёрстки LaTeX. LaTeX - это мощный инструмент, который позволяет создавать структурированные документы с высоким качеством типографики. Он особенно полезен для работы с математическими формулами и научными текстами. В рамках этой работы я переписал несколько страниц из PDF-файла, используя LaTeX. Это включало в себя форматирование текста, вставку изображений и создание сложных математических выражений.

В третьей лабораторной работе я использовал gnuplot - это портативный командный интерпретатор, который позволяет генерировать двумерные и трехмерные графики функций и данных. Я использовал gnuplot для создания трехмерного графика функции "3D График функции

$$3D \text{ График функции: } (x^2 + y^2) * 2 + 4 * a * x * (x^2 + y^2) - 8 * a * y^2$$

Я смог интегрировать результаты работы gnuplot в мой LaTeX документ. Это дало мне возможность визуализировать сложные математические функции и представить их в виде профессионально оформленного документа.

Оба этих инструмента, LaTeX и gnuplot, являются мощными и гибкими, и они позволили мне успешно выполнить мои лабораторные работы. Данный опыт показал мне, как можно использовать программное обеспечение для решения сложных задач и улучшения качества своей работы. Это было очень полезно для моего обучения и развития навыков в области математики и программирования.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Отсюда

$$z = x + yi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (2.7)$$

Правая часть этого равенства называется *тригонометрической формой записи комплексного числа* z . Мы будем ее употреблять и для $z = 0$; в этом случае $r = 0$, а φ может принимать любое значение - аргумент числа 0 неопределен. Итак, всякое комплексное число можно записать в тригонометрической форме.

Ясно также, что если комплексное число z записано в виде $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r \geq 0$, то число r является его модулем (ибо $r = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2}$), а φ - одним из значений его аргумента.

Запись операций умножения, деления и возведения в степень в Тригонометрической форме. Тригонометрическую форму записи комплексных чисел бывает удобно использовать при перемножении комплексных чисел, в частности, она позволяет выяснить геометрический смысл произведения комплексных чисел. Найдем формулы для умножения и деления комплексных чисел при тригонометрической форме их записи. Если

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

то по правилу умножения комплексных чисел получим

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (2.8)$$

(второе равенство является равенством двух множеств). Отметим, что эту простую формулу для аргумента произведения комплексных чисел нельзя было бы написать, если бы мы с самого начала ограничили однозначным выбором аргументов комплексных чисел, например, с помощью неравенств

$$-\pi < \arg(z) \leq \pi \quad (2.9)$$

так как сумма $\arg z_1 + \arg z_2$ могла бы уже не удовлетворять этому неравенству, хотя $\arg z_1$ и $\arg z_2$ ему удовлетворяли.

Применив последовательно формулы (2.8) к произведению n комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_n$, получим

$$\begin{aligned} |z_1 z_2 \dots z_n| &= |z_1| |z_2| \dots |z_n|, \\ \arg(z_1 z_2 \dots z_n) &= \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n. \end{aligned}$$

Если $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, то из полученных равенств следует, что

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg z^n = n \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.10)$$

Следует обратить внимание на то, что вторая формула (2.10) представляет собой равенство множеств: если φ — какое-либо значение аргумента числа z , и, следовательно, $n\varphi$ — значение аргумента z^n , то левая часть равенства состоит из всех чисел вида

$$n\varphi + 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

а правая — из всех чисел вида

$$n(\varphi + 2\pi m) + 2\pi k = n\varphi + 2\pi(nm + k),$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Нетрудно убедиться, что эти два множества состоят из одних и тех же чисел. Отсюда видно, что $\arg z^n \neq n \arg z$, так как здесь правая часть состоит лишь из чисел вида $n\varphi + 2\pi m$, а не $n\varphi + 2\pi nm$, т.е. таких чисел, которые получаются прибавлением к числу $n\varphi$ не всех возможных чисел вида $2\pi n$, т.е. чисел, кратных 2π , а лишь чисел, кратных числу 2π .

Отметим ещё, что формула (2.10) равносильна утверждению: если $\varphi \in \arg z$, то

$$n\varphi \in \arg z^n \quad (2.11)$$

Поэтому если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (2.12)$$

Отсюда для комплексного числа, абсолютная величина которого равна 1 (следовательно, оно имеет вид $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$), получаем

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Эта формула называется *формулой Муавра*^{*}.

Если $z = z_1/z_2$, $z_2 \neq 0$, т. е. $z_1 = z_2 z$, то $|z_1| = |z_2||z|$ и $\arg z_1 = \arg z_2 + \arg z$. Таким образом,

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg z = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Иначе говоря, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Извлечение корня. Если n — натуральное число, $z \in \mathbb{C}$, то *корнем n -й степени $\sqrt[n]{z}$* из комплексного числа z называется такое число w , что

$$w^n = z \quad (2.13)$$

Например, числа i и $-i$ являются корнями степени 2 (квадратными корнями) из числа $z = -1$, так как $i^2 = -1$ и $(-i)^2 = -1$. На этом примере уже видно, что число $\sqrt[n]{z}$ определено неоднозначно: для $z = -1$ может быть $\sqrt{-1} = i$, а может быть и $\sqrt{-1} = -i$. При

этом, в отличие от области действительных чисел, когда можно было рассматривать положительные и отрицательные значения корня, говорить о знаке корня в комплексной области нельзя, так как существенно комплексные числа не разбиваются на положительные и отрицательные: у существенно комплексного числа "нет знака". Поэтому при употреблении записи $\sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C}$ всегда надо отдавать себе отчет в том, что именно в рассматриваемом случае обозначает собой символ $\sqrt[n]{z}$.

Если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = p(\cos \psi + i \sin \psi)$ и $w^n = z$, то

$$p^n(\cos \pi\psi + i \sin \pi\psi) \stackrel{(2.12)}{\stackrel{(2.13)}}{=} r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Отсюда $p^n = r$, а следовательно, $p = \sqrt[n]{r}$, где корень n -й степени понимается в арифметическом смысле, т. е. $p \geq 0$, и

$$n\psi = \varphi + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

или

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$$

Для того чтобы получить все возможные различные значения корней n -й степени, здесь достаточно ограничиться значениями $k = 0, 1, \dots, n-1$:

$$\psi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k, k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.14)$$

так как при $k = n$ получим $\psi_n = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$, т. е. значение аргумента ψ_n отличается от значения аргумента $\psi_0 = \frac{\varphi}{n}$ на 2π и при остальных значениях k будут получаться значения угла ψ , отличающиеся от одного из значений $\psi_k, k = 0, 1, \dots, n-1$, на кратное числа 2π , а поэтому соответствующее значение корня будет совпадать с одним из чисел

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos \psi_k + i \sin \psi_k), k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.15)$$

Таким образом, корень n -й степени из числа $z = r(\cos \psi + i \sin \psi)$ имеет n значений $w_k, k = 0, 1, \dots, n - 1$, для которых справедливы формулы (2.14) и (2.15). Все значения корня $\sqrt[n]{z}$ имеют одинаковые модули $\sqrt[n]{r}$, а аргумент ψ_k корня w_k получается из аргумента ψ_{k-1} корня $w_{k-1}, k = 1, 2, \dots, n - 1$, так же, как и аргумент $\psi_0 = \varphi/n$ корня w_0 , - из аргумента ψ_{n-1} корня w_{n-1} прибавлением числа $2\pi/n$. Отсюда следует, что если начало всех векторов $w_k, k = 0, 1, \dots, n - 1$, поместить в начало координат, то их концы будут находиться в вершинах правильного n -угольника. На рис. 11 изображены корни $\sqrt[6]{-1}$.

Сопряженные комплексные числа. Для каждого комплексного числа $z = x + yi$ число $x - yi$ называется ему *сопряженным* и обозначается $\bar{z}$. Геометрический вектор $\bar{z}$ симметричен с вектором z

2.2 Задание 3

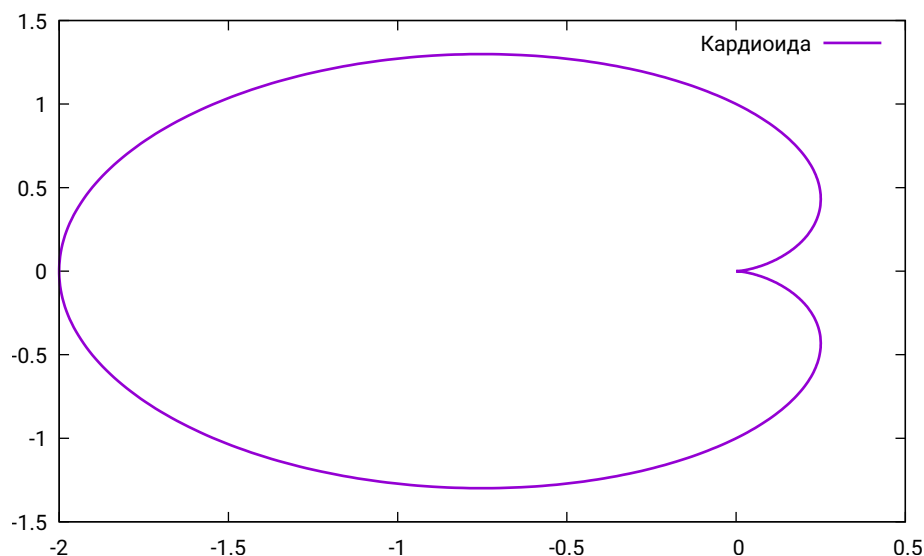


Рис. 1: Кардиоида