

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчёт по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Мастафанов Д. Е., группа №22101

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
3	Дифференциал функции	4
3.1	Задание 3	5

1 Описание работы

В качестве материала для задания 2 были даны страницы 149-151 тома 1 Краткого курса математического анализа. Сперва мною в документ был перенесён основной текст учебника, потом были введены формулы. Нумерация формул и разделов (он был всего 1) была сделана автоматической, как того требовало задание. Некоторые фрагменты исходного текста потребовали подключения дополнительных пакетов, чтобы перенести их в полной мере.

Для график из задания 3 была выбрана функция a^x . Код графика был написан на онлайн площадке и позже скомпилирован на учебном сервере. График был встроен в документ в формате pdf и автоматически пронумерован.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

то он называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. Таким образом,

$$f'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

Образно говоря, это равенство означает, что производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна скорости изменения переменной y относительно переменной x в указанной точке. Если положить $\Delta x = x - x_0$, $y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, не писать аргумент и обозначить производную через y' , то получим определение (1) в виде

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2)$$

Иногда производная обозначается не только штрихом, но еще указывается в виде нижнего индекса переменная, по которой берется производная, т. е. пишут, y'_x а также просто y_x .

Если предел (1) равен ∞ , $+\infty - \infty$, $af'(x_0)$ называется бесконечной.

Всегда, когда говорится о существовании производной (конечной или бесконечной) в некоторой точке, подразумевается (согласно определению производной), что функция определена в какой-то окрестности рассматриваемой точки.

Под производной всегда понимается конечная производная: в случае, когда допускаются бесконечные производные (определенного знака или знаконеопределенные), это специально оговаривается. Если функция f определена на некотором отрезке $[4, 6]$, то под ее производной в точках $x_0 = a$ и $x_0 = b$ обычно понимается соответственно предел справа или слева отношения $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x \rightarrow x_0$. Эти пределы называют также производными соответственно справа и слева. Операция вычисления производной функции называется операцией дифференцирования.

Примеры 1

1. $y = c$ - постоянная функция. Имеем $\Delta y = c - c = 0$, следовательно, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, т.е. $c' = 0$

2. $y = \sin x$. Имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \stackrel{9.1}{=} \cos x$$

Т. е. $(\sin x)' = \cos x$ Аналогично,

$$(\cos x)' = -\sin x$$

3. $y = a^x, a > 0$. Имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \stackrel{9.16}{=} a^x \ln a$$

Таким образом, $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$.

3 Дифференциал функции

Определение 1 Функция $y = f(x)$, заданная в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in R$, называется дифференцируемой в этой точке, если ее приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x = x - x_0,$$

представимо в этой окрестности в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad (3)$$

где A - постоянная. Линейная функция $A\Delta x$ (аргумента Δx) называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или, короче, dy . Таким образом,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$dy = A\Delta x. \quad (5)$$

Так как при $A \neq 0$ имеет место равенство (двустороннее)

$$o(\Delta x) = o(A\Delta x),$$

то из соотношения (3) при $A \neq 0$ следует, что $\Delta y = dy + o(dy)$, $\Delta x \rightarrow 0$, т. е. что функции Δy и dy переменной Δx эквивалентны при $\Delta x \rightarrow 0$ (см. теорему 1 в п. 9.3), причем, dy линейная функция аргумента Δx , а Δy , вообще говоря, - функция более сложной структуры. Для симметрии записи приращение независимого переменного Δx обозначается dx , т. е. $dx \stackrel{def}{=} \Delta x$. Поэтому формулу (5) можно записать в виде

$$dy = Adx \quad (6)$$

Вспомнив определение (Δx) (см. определение 3 в п. 9.2), условие (3) можно переписать в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x, \quad (7)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0. \quad (8)$$

Здесь функция $\varepsilon(\Delta x)$ определена для тех Δx , для которых определена функция $(\Delta x) = \Delta y - A\Delta x$ в формуле (3) (см. определение 4 в п. 9.2), т. е. для всех таких Δx , что $x + \Delta x \in U(x_0)$ (см. определение 2), в частности для $\Delta x = 0$. Именно по множеству таких Δx и берется предел (8), а так как точка $\Delta x = 0$ принадлежит этому множеству, то функция $\varepsilon(\Delta x)$ непрерывна в этой точке (см. п. 6.2), и, следовательно, в силу (8) имеем

$$\varepsilon(0) = 0. \quad (9)$$

Теорема 1 . Функция дифференцируема в некоторой точке в том и только том случае, когда она в этой точке имеет конечную производную.

1) Пусть у функции f существует конечная производная $f'(x_0)$, т. е. существует конечный предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$. Это равносильно тому, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x) \quad (10)$$

где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta x \neq 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ (левая часть формулы (10) не определена при $\Delta x = 0$, следовательно, и функция $\varepsilon(\Delta x)$ не определена при $\Delta x = 0$). Поэтому

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

Доопределив функцию $\varepsilon(\Delta x)$ нулем в точке $\Delta x = 0$, т. е. положив $\varepsilon(0) = 0$, получим

$$\varepsilon(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

и, следовательно,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0. \quad (11)$$

Это и есть условие (3) дифференцируемости функции f в точке x_0 , причем

$$f'(x_0) = A. \quad (12)$$

2) Пусть теперь, наоборот, функция f дифференцируема в точке x_0 , т. е. выполняется условие (3), или, что то же самое, условия (7), (8). Тогда при $\Delta x \neq 0$ будем иметь $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x)$, откуда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \underset{(8)}{=} A,$$

т. е. в точке x_0 у функции f существует производная, причем имеет место равенство (12). <

Замечание 1 Из формул (6) и (12) следует, что дифференциал dy функции $y = f(x)$ записывается в виде

$$dy = f'(x_0)dx, \quad (13)$$

3.1 Задание 3

(1)

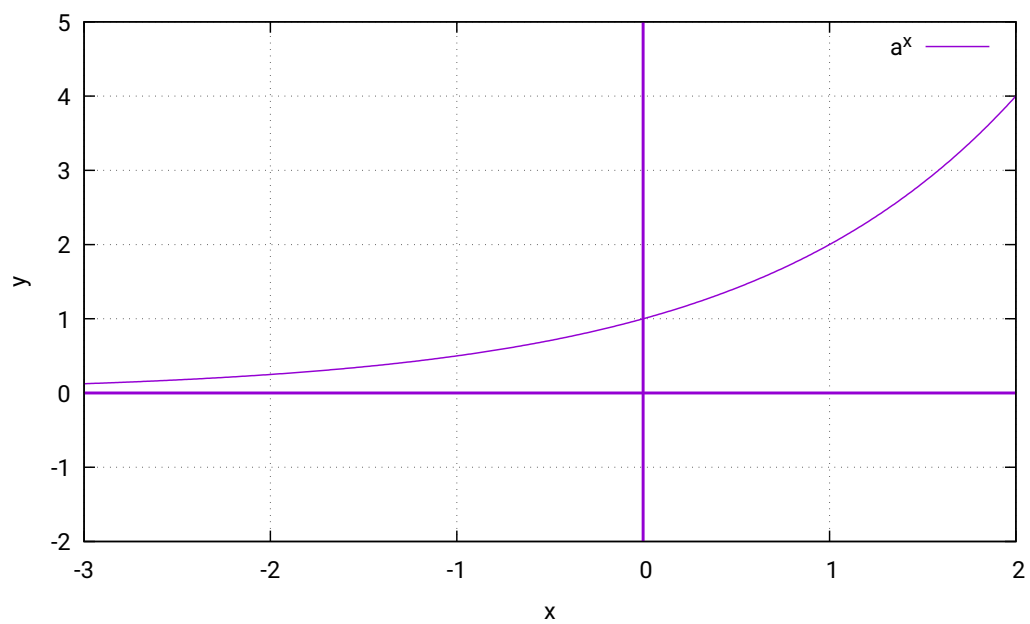


Рис. 1: График функции 2^x