

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Годовиков В. А. группа 22103

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	5

1 Описание работы

В ходе учебной практики я выполнил три задания, связанных с применением компьютерных технологий в математике.

Первое задание заключалось в работе с файлом `first-example.tex`, где мне надо было добавить в него абзац текста и несколько специальных символов. После редактирования я транслировал исходный файл с помощью команд `latex`, `dvips` и `pdflatex`, получив документы в форматах DVI, PostScript и PDF. Это позволило освоить базовые навыки работы с компиляцией LaTeX-документов и преобразованием форматов.

Второе задание было посвящено созданию структурированного документа с математическим текстом из учебника по математическому анализу. Я оформил теоремы, определения, текст и формулы. Для оформления определений и лемм я использовал собственные окружения, настроенные с помощью пакета `amsthm`.

Третье задание включало визуализацию данных. С помощью интерпретатора Gnuplot я построил график функции $y = \sin(x) + \cos(3x) + x$. Для этого написал скрипт. Полученный график я сохранил в формате PNG и добавил в документ, созданный во втором задании, используя окружение `figure` и команду `includegraphics`.

Для выполнения работ я использовал скринкасты. Итогом практики стал документ, объединяющий теоретический материал с визуализацией данных. Приобретённые навыки: работа с текстом, формулами, окружениями, автоматической нумерацией и графиками, которые будут полезны при подготовке научных статей и курсовых работ.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Таким образом, числа α , β и ξ принадлежат всем отрезкам $[a_n, b_n]$, а следовательно, по доказанному выше, они равны, т. е. выполняется условие (4.25). $\triangleleft$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для интервалов и полуинтервалов множества действительных чисел аналог принципа вложенных отрезков не имеет места. Например,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для множества одних только рациональных чисел принцип вложенных отрезков несправедлив. При этом под отрезком в множестве рациональных чисел понимается пересечение обычного отрезка, концы которого являются рациональными числами, с множеством рациональных чисел:

$$[a, b] \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : a \leq x \leq b\}, \quad a \in \mathbb{Q}, \quad b \in \mathbb{Q}.$$

Например, пусть числа a_n и b_n представляют собой десятичные приближения числа $\sqrt{2}$ с недостатком и с избытком и имеют по n десятичных знаков после запятой, $n = 1, 2, \dots$, тогда

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \cap \mathbb{Q} = \emptyset,$$

так как $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\}$ и $\sqrt{2}$ — иррациональное число: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

4.6*. Счетность рациональных чисел. Несчетность действительных чисел. Сравнение множеств осуществляется с помощью понятия взаимно однозначного соответствия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Два множества, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию), называются *равномощными*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно убедиться, что если множество X равномощно множеству Y , а множество Y равномощно Z , то и множество X равномощно множеству Z .

Множество X называется *конечным*, если существует такое натуральное число n (называемое *числом элементов множества X*), что между элементами множества X и элементами множества $\{1, 2, \dots, n-1, n\}$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Очевидно, *два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов*. Пустое множество по определению считается конечным. Множества, не являющиеся конечными, называются *бесконечными*.

Приведем примеры равномощных бесконечных множеств

ПРИМЕРЫ. 1. Множество четных натуральных чисел равномощно множеству всех натуральных чисел. Действительно, соответствие $n \mapsto 2n$, $n = 1, 2, \dots$, является биекцией множества натуральных чисел N и множества всех четных натуральных чисел.

2. Множество всех целых чисел равномощно множеству натуральных чисел. В самом деле, соответствие

$$\begin{aligned} 2n &\mapsto n, & n &= 1, 2, \dots, \\ 2n + 1 &\mapsto -n, & n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

является биекцией множества натуральных чисел N и множества целых чисел Z .

3. Любые два конечных интервала (соответственно отрезка) числовой прямой равномощны. Если заданы два интервала (a, b) и (c, d) , то отображение

$$x = \frac{(d-c)t + bc - ad}{b-a}, \quad a < t < b,$$

является биекцией интервалов (a, b) и (c, d) (соответственных отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$).

4. Множество всех действительных чисел R равномощно любому конечному интервалу числовой оси. В силу замечания после определения 5 и примера 3 достаточно показать, что множество действительных чисел равномощно хотя бы одному интервалу. Для этого достаточно заметить, что функция $y = \frac{t}{1-t^2}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками интервала $(-1, 1)$ и точками всей числовой оси.

Примеры 1, 2 и 4 показывают, что в случае бесконечных множеств собственное подмножество бесконечного множества может оказаться равномощным всему множеству.

5. Пусть задано некоторое множество X . Всякое отображение множества натуральных чисел N в множество X , т. е. отображение вида $f : N \rightarrow X$, называется *последовательностью элементов множества X* . Элемент $f(n)$, $n \in N$, обозначается через x_n и называется *n -м членом последовательности $f : N \rightarrow X$* , число n — его номером, и сам элемент $f(n) \in X$ — *значением этого члена*.

Последовательность $f : N \rightarrow X$ обозначается также $\{x_n\}$ или x_n , $n = 1, 2, \dots$

Отметим, что член последовательности задается его значением и номером. Если $n > m$, то член последовательности x_n называется членом, следующим за членом x_m .

Множество членов последовательности равномощно множеству натуральных чисел, так как каждому натуральному числу соответствует член последовательности и разным натуральным числам соответствуют разные члены последовательности, отличающиеся друг от друга по крайней мере номерами. Таким образом, множество членов последовательности всегда бесконечно, в то время как множество значений членов последовательности, т. е. множество значений функции $f : N \rightarrow X$ (иначе говоря, подмножество множества X , на которое посредством отображения f отображается множество N натуральных чисел), может оказаться конечным множеством, в частности состоять из одного элемента. В последнем случае, т. е. тогда, когда у последовательности все значения её элементов совпадают, она называется *стационарной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется *счётным*.

Из рассмотренных выше примеров 1, 2 и 5 следует, что множества всех четных чисел, всех целых чисел и всех членов любой последовательности являются счётными.

▷ X — счётное множество, т. е. существует взаимно однозначное отображение (биекция) множества натуральных чисел N на множество X . Элемент множества X , соответствующий при этом отображении числу n , обозначим, как и в случае последовательности, x_n и будем называть число n его номером. Поэтому можно сказать, что множество является счётным, если его элементы можно перенумеровать натуральными числами. Отличие определения счётного множества от последовательности состоит в том, что в случае последовательности рассматриваемое отображение множества натуральных чисел не обязано быть биекцией: не исключается случай, когда разным натуральным числам окажется поставленным в соответствие один и тот же элемент. Отсюда следует, что множество значений членов последовательности либо конечно, либо счётно, т. е., как говорят, не более чем счётно.

ЛЕММА 1. *Любое бесконечное множество содержит бесконечное счетное подмножество.*

Пусть X — бесконечное множество; тогда оно во всяком случае непусто, т. е. в нем существует по крайней мере один элемент, обозначим его через x_1 . Поскольку множество X бесконечно, то множество $X \setminus \{x_1\}$ также непусто, т. е. содержит по крайней мере один элемент, обозначим его x_2 . Продолжая этот процесс, на n -м шаге получим элемент x_n . Поскольку X — бесконечное множество, то множество $X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ непусто, т. е. содержит по крайней мере один элемент, обозначим его x_{n+1} и т. д. Множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ — искомое счетное подмножество множества X .

ЛЕММА 2. *Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

Пусть X — счетное множество: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ и $Y \subset X$. Обозначим через y_1 элемент из Y , имеющий наименьший номер в X , через y_2 — элемент множества Y , имеющий следующий ближайший номер, и т. д. Поскольку каждый элемент множества Y является некоторым элементом x_n множества X и, следовательно, имеет номер n ,

2.2 Задание 3

