

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Филатов И. А. группа 22103

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	6

1 Описание работы

В ходе выполнения работы 2 по оформлению математического текста из *тома 1 страниц* 91–93 в системе L^AT_EX был проделан следующий путь:

1. Оформление математических формул: записаны все формулы из исходного текста с использованием окружения `equation`, создана автоматическая нумерация формул с возможностью использования ссылок через команды `\label` и `\ref`.

2. Структурирование: созданы разделы через команды `\section` и `\subsection` с автоматической нумерацией разделов.

3. Создание окружений: оформлены *теоремы*, *леммы* и *определения* с помощью команды `\newtheorem`.

4. Новые команды: созданы пользовательские команды для часто используемых математических выражений и символов. В результате получен оформленный документ, соответствующий вёрстке в системе L^AT_EX.

В ходе выполнения работы 3 по визуализации математических формул были выполнены следующие этапы:

1. Подготовка графика в **gnuplot**: построена кривая и плоскость в декартовой системе координат с использованием команды `plot`, результат был сохранён в формате PDF.

2. Вставка изображения в документ: использовано окружение `figure`, применена автоматическая нумерация рисунков с помощью `\label` и `\ref`, выполнено центрирование командой `\centering`, добавлена поясняющая подпись с помощью `\caption`. Результатом работы стало добавление в документ, корректно встроенного графика математической кривой и плоскости с нумерацией и позиционированием.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

В результате установлено взаимно однозначное соответствие между всеми неотрицательными действительными числами и всеми бесконечными десятичными дробями, не имеющими периода, состоящего только из цифры 9. Бесконечные десятичные дроби с периодом, состоящим только из нуля, обычно записываются в виде конечной десятичной дроби, т. е. вместо $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 00 \dots 0 \dots$ пишут $\alpha_0 \alpha_2 \dots \alpha_n$. Подчеркнем, что при конструкции соответствия (5.79) – (5.82) между неотрицательными действительными числами и десятичными дробями это соответствие оказалось взаимно однозначным в силу того, что рассматривались лишь десятичные дроби, не имеющие периода, состоящего только из цифры 9, и требовалось, чтобы никакое a не являлось правым концом ни одного отрезка I_n соответствующей этому числу a системы $\{I_n\}$. При отказе от выполнения этих условий для каждого числа, являющегося концом некоторого отрезка ранга n , существовали бы две его записи в виде бесконечной десятичной дроби:

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n 99 \dots 9 \dots = \alpha_0, \alpha_1 \dots (\alpha_n + 1) 00 \dots 0 \dots, \alpha_n \neq 9,$$

например,

$$1 = 1, 00 \dots 0 = 0, 99 \dots 9 \dots$$

Если $\alpha > 0$ и α соответствует дробь $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ то отрицательному числу $-\alpha$ поставим в соответствие ту же дробь, только со знаком минус, и будем писать

$$-\alpha = -\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots \quad (1)$$

Запись действительных чисел в виде (5.82) и (1) называется их *десятичной записью*.

Бесконечные десятичные дроби $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$, не имеющие периоды, состоящего только из одних девяток, называются *допустимыми*.

Из всего сказанного видно, что десятичная запись действительных чисел устанавливает между всеми действительными числами и всеми допустимыми десятичными дробями взаимно однозначное соответствие.

Конечно, нужно не только уметь записывать каждое действительное число в виде десятичной дроби, но и уметь производить с помощью этой записи различные операции над числами: сравнивать их по величине, складывать, вычитать, умножать, делить и т.д. Перейдем к рассмотрению этих вопросов.

Пусть снова $\alpha \geq 0$ и $\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$. Введем обозначения

$$\underline{\alpha}_n = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n, \overline{\alpha}_n = \underline{\alpha}_n + 10^{-n}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Если же $\alpha < 0$ и $\alpha = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$, то положим

$$\underline{\alpha}_n = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n - 10^{-n}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Из этих формул сразу следует, что если $b < 0$ и $b = -a, a > 0$, то (рис. 56)

$$\underline{b}_n = -\overline{a}_n, \overline{b}_n = -\underline{a}_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Конечная десятичная дробь $\underline{a}_n$ (как в случае (2), так и в случае (3)) называется *нижним десятичным приближением порядка n числа a* , а дробь $\overline{a}_n$ — его *верхний десятичный приближением* того же порядка. Очевидно, что в случае $a \geq 0$ конечные десятичные дроби $\underline{a}_n$ и $\overline{a}_n$ являются концами отрезка I_n (см. (5.80)) последовательности вложенных отрезков $\{I_n\}$, поставленной в соответствии числу $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$, т.е.

$$I_n = [\underline{a}_n, \overline{a}_n], n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

и, таким образом,

$$\underline{a}_n \leq a \leq \overline{a}_n, n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

В силу соотношений (4) система отрезков ?? является системой вложенных отрезков и при $a < 0$; выполняется в этом случае и неравенство (6). Из того, что система отрезков (5) является системой вложенных отрезков, следует, что

$$\underline{a}_n \leq \underline{a}_{n+1}, \overline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_n, n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

т. е. что последовательность нижних десятичных приближений представляет собой возрастающую последовательность, а верхних — убывающую.

Наконец, из (2) и (3) непосредственно следует, что

$$\overline{a}_n - \underline{a}_n = 10^{-n} \quad (5.93), \quad (8)$$

а так как $\lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-n} = 0$, то для любого действительного числа a последовательность отрезков (5) образует систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю и единственной точкой пересечения которых является точка a . Отсюда имеем (см. замечание в п. 5.7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a}_n = a \quad (9)$$

Таким образом, доказано следующее свойство десятичных приближений.

1°. *Каково бы ни было действительное число a , последовательность его нижних десятичных приближений $\{\underline{a}_n\}$ возрастает, верхний $\{\overline{a}_n\}$ убывает, и имеет место равенство (9).*

С л е д с т в и е. 1 *Всякое действительное число является пределом последовательности рациональных чисел.*

▷ В самом деле, нижние и верхние десятичные приближения любого числа, представляя собой конечные десятичные дроби, являются рациональными числами, поэтому утверждение следствия непосредственно вытекает из равенства (9). ◁

Перейдем теперь к сравнению по величине действительных чисел посредством их десятичной записи.

2°. Если $a \in R, b \in R$, то $a < b$ в том и только том случае, когда существует такое неотрицательное целое число n_0 , что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\underline{a}_n < \underline{b}_n. \quad (10)$$

▷ Если $a < b$, то из условия (9) согласно свойству 3° пределов (п. 5.3) сразу следует существование такого n_0 , то для $n > n_0$ выполняется условие (10). Обратно, если существует такое n_0 , что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство (10), то, перейдя в нем к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $a \leq b$, но случай $a = b$ невозможен, так как тогда в силу однозначности десятичной записи чисел для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ имело бы место равенство $\underline{a}_n = \underline{b}_n$, что противоречило бы условию (10).

Следовательно, $a < b$. ◁

С помощью арифметических операций над нижними и верхними десятичными приближениями чисел можно получить нужный результат соответствующих операций над самими числами с любой наперед заданной точностью. Это видно из следующего утверждения.

3°. Если $a \in R, b \in R$, то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{a}_n + \underline{b}_n) &= a + b, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x \in P(\underline{a}_n - \underline{b}_n) &= a - b, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{a}_n \underline{b}_n) &= ab, \end{aligned}$$

а при $b \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} \right) = \frac{a}{b}.$$

▷ Эти формулы сразу следуют из равенств (9) и свойств пределов числовых последовательностей (п. 5.6). Отметим лишь, что из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{b}_n = b \neq 0$ следует существование такого номера n_0 , что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\underline{b}_n \neq 0$ (см. следствие 1 свойства 3° пределов, п. 5.3) и при рассмотрении предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}$ берутся только дроби $\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}$, для которых $\underline{b}_n \neq 0$, что заведомо имеет место при $n > n_0$. ◁

2.2 Задание 3

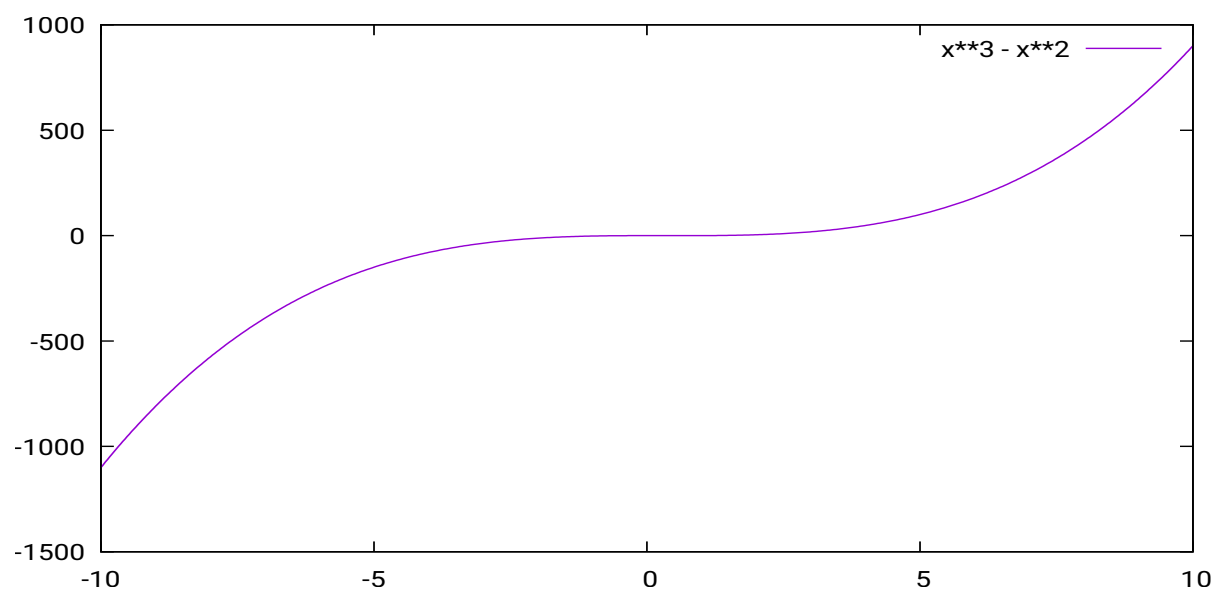


Рис. 1: график функции $x^3 - x^2$