

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчёт по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:
Ермолина Е. Е., группа №22101

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	6

1 Описание работы

В рамках первого задания была поставлена задача подготовить документ, содержащий математический текст, предоставленный инструктором. Основные этапы выполнения задания включают:

1. Составление документа: На основе материалов предоставленных инструктором , был написан код, охватывающий ключевые математические концепции. Важно было обеспечить последовательность и логическую структуру кода.
2. Набор математических формул: В первом скринкасте были продемонстрированы приемы эффективного набора формул с использованием LaTeX, что позволило создать аккуратный и профессионально оформленный математический текст.
3. Рубрикация и специальные абзацы: Второй скринкаст был посвящён процессу регистрации текста и создания специальных абзацев. Это обеспечило удобочитаемость и структурированность документа.
4. Оформление новых окружений: Третий скринкаст иллюстрировал создание новых окружений для теорем, лемм и других математических объектов, что расширило возможности оформления документа.
5. Автоматизация разделов и формул: Все разделы и номера формул были настроены для автоматического оформления, что значительно упростило процесс редактирования и передало документу высокую степень аккуратности.

Задание 2: Второе задание заключалось в построении графического изображения математической кривой в декартовых координатах с помощью интерпретатора команд `gnuplot`. Этапы выполнения задания следующие:

1. Создание графика: Сначала была освоена работа с `gnuplot` для построения графиков функций. При помощи командного синтаксиса был создан график кривой, который иллюстрировал заданное математическое уравнение.
2. Документация результатов: График был вставлен в документ, подготовленный на предыдущем этапе.
3. Работа со скринкастами: В первом скринкасте была подробно продемонстрирована настройка `gnuplot` и процесс построения графика.

Второй скринкаст был посвящён созданию плавающих объектов, что сделало графическое представление данных ещё более наглядным и интерактивным. Таким образом, оба задания позволили не только углубить знания в области математического оформления текста и визуализации данных, но также развить навыки работы с современными инструментами для создания профессиональных научных материалов.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

1. Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

Теорема 1 *Если:*

- (a) функции f и g дифференцируемы на интервале (a, b) ;
 (b) $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$;
 (c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.
 (d) существует конечный или бесконечный предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$;

То существует предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2.1)$$

▷ Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k. \quad (2.2)$$

Покажем, что при выполнении остальных условий теоремы

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k. \quad (2.3)$$

Если $a < x < x_0 < b$, то на отрезке $[x, x_0]$ функции f и g удовлетворяют условиям теоремы Коши (см. теорему 4 в п. 12.2), а поэтому существует такая точка $\xi = \xi(x_0, x)$, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad x < \xi < x_0 \quad (2.4)$$

Далее, в силу (13.7) существует такая точка $x_1 = x_1(x_0, \xi)$, $a < x_1 < x_0$, что при всех $x \in (a, x_1)$ выполняются неравенства

$$f(x) \neq 0,$$

$$g(x) \neq 0,$$

$$f(x) \neq f(x_0),$$

и, следовательно, можно производить деление на $f(x)$, $g(x)$ и $1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}$ (а также и на $1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}$), поскольку в силу условий теоремы $g(x) \neq g(x_0)$; см. (12.16) в доказательстве теоремы 4 из п. 12.2). Для этих значений x из (13.11) вытекает равенство

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

откуда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}, \quad (2.5)$$

В правой части равенства первый сомножитель стремится к числу k при $x_0 \rightarrow a$ (ибо $a < \xi < x_0$, и поэтому $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$), а второй в силу условия (13.7) стремится к 1 при $x \rightarrow a$ и фиксированном x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1. \quad (2.6)$$

Непосредственно перейти к пределу в равенстве (13.12) нельзя, так как указанные выше предельные переходы в сомножителях в правой части равенства происходят при разных условиях: при $x_0 \rightarrow a$ и при фиксированном x_0 , но $x \rightarrow a$. Однако если задать произвольно окрестность $U(k)$ предела k отношения производных (13.9), то можно сначала зафиксировать точку x_0 столь близко к точке a , что отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ попадет в эту окрестность, ибо $a < \xi < x_0$. Согласно же условию (13.13) для всех точек x , достаточно близких к a , отношение (см. (13.12)) также будет принадлежать указанной окрестности $U(k)$, а это означает справедливость утверждения (13.10).

Проведенное рассуждение нетрудно записать с помощью неравенств. Пусть сначала предел (13.9) конечный. Положим

$$\alpha(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)} - k. \quad (2.7)$$

Тогда из (13.9) будем иметь $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, и, следовательно, для любого произвольно фиксированного $\epsilon > 0$ существует такое x_0 , что для всех x из интервала (a, x_0) выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.8)$$

Если положить ещё

$$\beta(x) = 1 - \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}, \quad (2.9)$$

то в силу условия (13.7) имеем

$$\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0. \quad (2.10)$$

Теперь имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{(13.12), (13.14), (13.15)}{=} (k + \alpha(\xi))(1 + \beta(x)) = k + \alpha(\xi) + k\beta(x) + \alpha(\xi)\beta(x) \quad (2.11)$$

$x < \xi < x_0$; при этом в силу (13.17) существует такое $\delta > 0$, что $a < a + \delta < x_0$, что при $x \in (a, a + \delta)$ выполняется неравенство

$$|k\beta(x) + \alpha(\xi)\beta(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (2.12)$$

В результате получаем, что для всех $x \in (a, a + \delta)$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| \underset{(13.18)}{\leq} |\alpha(\xi)| + |k\beta(x)| + |\alpha(\xi)\beta(x)| \underset{\substack{(13.15) \\ (13.19)}}{\leq} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad (2.13)$$

а это и означает выполнение равенства (13.10).

Если теперь

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty, \quad (2.14)$$

Пусть $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, откуда по уже доказанному $f(x) = 0$, и потому

$$g(x) = \infty. \quad (2.15)$$

Из (13.20) и (13.21) следует, что (13.8) справедливо и в этом случае. Аналогично рассматривается и случай бесконечного предела со знаком. Более того, можно показать, что в условиях теоремы бесконечный предел (13.9) всегда является бесконечностью со знаком.

Конец

В теоремах 2 и 3 был рассмотрен случай, когда аргумент стремился к числу a справа. К этому случаю сводятся случаи, когда аргумент x стремится к числу a слева или произвольным образом, а также случаи, когда a является одной из бесконечностей: ∞ , $+\infty$ или $-\infty$. Во всех этих случаях при соответствующих предположениях имеет место формула

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим, например, случай стремления аргумента к $+\infty$ для функций f и g , заданных на полуинтервале вида $[c, +\infty]$, где c - некоторое число. Этот случай сводится к случаю, рассмотренному в теореме 3 с помощью замены переменного $x = 1/t$. В самом деле,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t) \cdot (-1/t^2)}{g'(1/t) \cdot (-1/t^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(здесь штрихом обозначены производные функций f и g по первоначальному аргументу x).

Правило вычисления предела отношений функций по формуле (13.22) называется правилом Лопиталя.

2.2 Задание 3

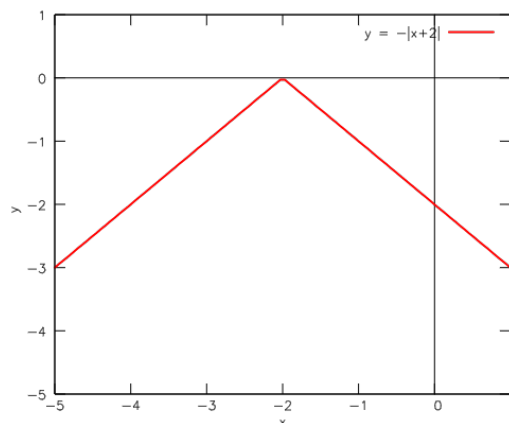


Рис. 1: График функции $y = -|x+2|$