

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчёт по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Чернятьев Д. А., группа №22101

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
156	Гл. 1. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	3
10.6.	Производная обратной функции	4
2.2	Задание 3	5

1 Описание работы

В процессе выполнения заданий по работе с LaTeX и gnuplot я последовательно осваивал различные этапы подготовки научных и учебных документов. На первом этапе (задание до 16.02) я загрузил файл first-example.tex в редактор Emacs, добавил в него оригинальный абзац с одной группой и двумя специальными символами, после чего скомпилировал документ в форматы .dvi, .ps и .pdf.

Второй этап (до 13.04) включал подготовку более сложного документа на основе математического текста, взятого из указанных страниц тома 1. Я ввёл математические формулы с соблюдением правильной нумерации, оформил новые окружения — такие как теоремы, замечания, примеры, — используя соответствующие пакеты LaTeX. Также была реализована структура документа с автоматической нумерацией.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

156 Гл. 1. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Производные; при этом имеют место формулы

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \quad (1)$$

$$(y_1 y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2' \quad (2)$$

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2} \quad (3)$$

(в формулах (1)-(3) значения всех функций взяты при $x = x_0$).

Прежде всего заметим, что в силу условий теоремы в точке x_0 существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} = y_1', \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = y_2'.$$

Докажем теперь последовательно формулы (1)-(3).

1) Пусть $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$; тогда

$$\Delta y = (\lambda_1(y_1 + \Delta y_1) + \lambda_2(y_2 + \Delta y_2)) - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \Delta y_1 + \lambda_2 \Delta y_2$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lambda_1 \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \lambda_2 \frac{\Delta y_2}{\Delta x}.$$

Перейдя здесь к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим формулу (1).

2) Пусть $y = y_1 y_2$; тогда

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1)(y_2 + \Delta y_2) - y_1 y_2 = y_2 \Delta y_1 + y_1 \Delta y_2 + \Delta y_1 \Delta y_2,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 + y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \Delta y_2. \quad (4)$$

Заметив, что в силу непрерывности функции y_2 в точке x_0 выполняется условие $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y_2 = 0$, и, перейдя в равенстве (4) к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим формулу (2).

3) Пусть $y = y_1/y_2$ и $y_2(x_0) \neq 0$; тогда

$$\Delta y = \frac{y_1 + \Delta y_1}{y_2 + \Delta y_2} - \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2 \Delta y_1 - y_1 \Delta y_2}{y_2(y_2 + \Delta y_2)},$$

следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 - y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x}}{y_2(y_2 + \Delta y_2)}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим формулу (3).

Отметим, что из формулы (1) при $y_2 = 0$ (так же, как и из формулы (2)), когда функция y_2 равна постоянной, а поэтому $y_2' = 0$, следует, что постоянную можно выносить из-под знака дифференцирования, т. е.

$$(\lambda y)' = \lambda y', \quad \lambda \in R.$$

Пример

Вычислим производную функции $\tan x$. Применяя формулу (3), получим

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (5)$$

Аналогично вычисляется

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Замечание. Поскольку $dy = y'dx$, то, умножая формулы (1)-(3) на dx , получим:

$$d(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 dy_1 + \lambda_2 dy_2,$$

$$d(y_1 y_2) = y_2 dy_1 + y_1 dy_2,$$

$$d\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{y_2^2}.$$

10.6. Производная обратной функции

Теорема. Если функция f непрерывна и строго монотонна в окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция f^{-1} имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ и

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}. \quad (6)$$

Пусть $y = f(x)$, где функция f строго монотонна, тогда

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

и

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0)} + o(1).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

и, следовательно,

$$\frac{df^{-1}}{dy} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

2.2 Задание 3

В этом задании было построено графическое представление функции $y = \sin(5x) + \sqrt{x}$ с использованием пакета `pgfplots`:

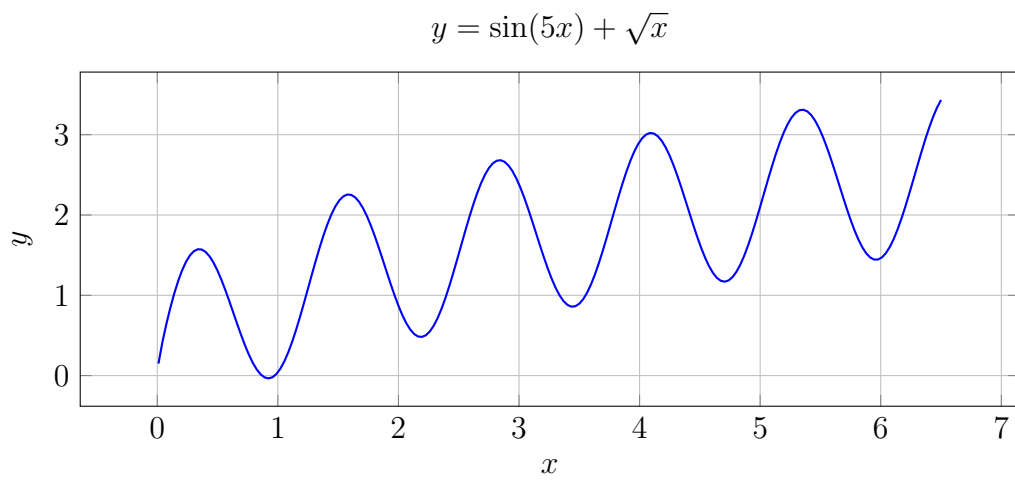


Рис. 1: График функции $y = \sin(5x) + \sqrt{x}$, выполненный в среде `pgfplots`