

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:
Берестнева Д. Д. группа 22103

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	6

1 Описание работы

В первой лабораторной работе я занималась трансляцией файла под названием «first-example.tex». Мне нужно было добавить в исходный файл оригинальный абзац текста, содержащий не менее одной группы и двух специальных символов. В результате нужно было получить документ в трех различных форматах: dvi, postscript и pdf. Это был интересный и образовательный процесс, который позволил мне впервые поработать в LaTeX и узнать, как он устроен.

Во второй лабораторной работе я использовала систему компьютерной вёрстки LaTeX. LaTeX - это инструмент, который позволяет создавать структурированные документы с высоким качеством типографики. Он особенно полезен для работы с математическими формулами и научными текстами. В рамках этой работы я переписала несколько страниц из PDF-файла, используя LaTeX. Это включало в себя форматирование текста, набор математических формул и оформление новых окружений (теоремы, леммы и пр.) и команд.

В третьей лабораторной работе я использовала gnuplot - это портативный командный интерпретатор, который позволяет генерировать двумерные и трехмерные графики функций и данных. Я использовала gnuplot для создания двумерного графика функции "Астроида":

$$\text{График функции } f(x, y) = \text{acos}(t)^3, \text{asin}(t)^3$$

Далее я смогла интегрировать результаты работы gnuplot в мой LaTeX документ. Это дало мне возможность визуализировать сложные математические функции и представить их в виде профессионально оформленного документа.

Оба этих инструмента, LaTeX и gnuplot, являются мощными и гибкими, и они позволили мне успешно выполнить мои лабораторные работы, применив знания, полученные в ходе учебной практики. Данный опыт показал мне, как можно использовать программное обеспечение для решения сложных задач и улучшения качества своей работы. Это было очень полезно для моего обучения и развития навыков в области математики и программирования.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

следует, что число $\overline{z_1 + z_2}$ симметрично с $z_1 + z_2$, а число $\overline{z_1 - z_2}$ симметрично с $z_1 - z_2$.

Проверим теперь, что в формуле 6° абсолютные величины и аргументы чисел, стоящих в левой и правой частях равенства, равны:

$$\begin{aligned} |\overline{z_1 z_2}| &\stackrel{1^\circ}{=} |z_1 z_2| \stackrel{(2.8)}{=} |z_1| |z_2| \stackrel{1^\circ}{=} |\overline{z_1}| |\overline{z_2}| \stackrel{(2.8)}{=} |\overline{z_1} \overline{z_2}|, \\ \arg(\overline{z_1 z_2}) &\stackrel{1^\circ}{=} -\arg(z_1 z_2) \stackrel{(2.8)}{=} -(\arg z_1 + \arg z_2) = \\ &= -\arg z_1 - \arg z_2 = \arg \overline{z_1} + \arg \overline{z_2} \stackrel{(2.8)}{=} \arg(\overline{z_1} \overline{z_2}). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается свойство 7°.

Используя сопряженные комплексные числа, можно получить формулу для частного комплексных чисел в алгебраической форме: умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i}$ на число $x_2 - y_2 i$, сопряженное знаменателю, получим

$$\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

При построении теории комплексных чисел мы исходили из того, что комплексным числом называют объекты вида $z = x + yi$, где x и y — действительные числа, а i — некоторый новый элемент, называемый мнимой единицей. Этому определению можно легко придать строго логическую форму следующим образом.

Назовем комплексным числом упорядоченную пару (x, y) действительных чисел x и y . Операции сложения и умножения для двух комплексных чисел (x, y) и (x', y') определим по формулам

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y). \quad (2.17)$$

Комплексные числа вида $(x, 0)$ будем обозначать просто символом x :

$$(x, 0) = x, \quad (2.18)$$

а комплексное число $(0, 1)$ — символом i . Из формулы (2.17) следует, что

$$i^2 \equiv i \cdot i = (0, 1)(0, 1) \stackrel{(2.17)}{=} (-1, 0) = -1.$$

Для любого комплексного числа (x, y) имеет место легко проверяемое тождество $(x, y) = x + yi$. В самом деле,

$$(x, y) \stackrel{(2.16)}{=} (x, 0) + (0, y) \stackrel{(2.17)}{=} (x, 0) + (0, 1)(y, 0) \stackrel{(2.18)}{=} x + yi.$$

Таким образом, мы пришли к первоначальной записи комплексных чисел.

2.4. Перестановки и сочетания

Пусть задано конечное множество элементов. Выясним, сколькими различными способами можно упорядочить элементы этого множества.

Определение 3 Группы элементов, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются перестановками этих элементов.

Число всевозможных перестановок n элементов обозначается P_n . Как это будет ниже показано оно равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n . Для краткости это произведение обозначают символом $n!$ (читается "эн факториал"), т.е. $n! \stackrel{def}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Для удобства полагают

$$0! = 1. \quad (2.19)$$

Пример 1 Группы $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$ и $\{3, 2, 1\}$ являются всевозможными перестановками элементов 1, 2 и 3.

Лемма. Если P_k — число всех перестановок из k элементов и $k > 1$, то

$$P_k = kP_{k-1}. \quad (2.20)$$

▷ Множество всех перестановок из заданных k элементов разбиваются на группы, в каждой из которых на первом месте стоит один и тот же элемент. Число таких групп равно k — числу всех элементов.

В перестановках, входящих в одну и ту же группу, на последующих $k - 1$ местах могут располагаться оставшиеся $k - 1$ элементов в любом порядке. Поэтому число перестановок в каждой группе равно P_{k-1} .

Каждая перестановка из k элементов попадает в одну из описанных групп и в точности один раз. Поэтому для числа P_k всех перестановок из k элементов имеет место соотношение (2.20). $\triangleleft$

Теорема 1 Число всевозможных перестановок из n элементов равно $n!$:

$$P_n = n!. \quad (2.21)$$

$\triangleright$ Докажем теорему методом математической индукции. Если $n = 1$, то, очевидно $P_1 = 1 = 1!$. Если для некоторого $k \in N$ имеет место формула $P_k = k!$, согласно лемме $P_{k+1} \stackrel{(2.20)}{=} (k+1)P_k = (k+1)k! = (k+1)!$. $\triangleleft$

Выясним теперь сколько подмножеств, содержащих m элементов, имеет множество, состоящее из n элементов, $1 \leq m \leq n$.

Определение 4 Каждое множество, содержащее m элементов из числа n заданных, называется сочетанием из n элементов по m .

Подчеркнем, что сочетание определено как множество некоторых элементов без рассмотрения порядка, в котором они расположены.

Число всех сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m .

Пример 2 Множества $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$ образуют всевозможные сочетания из трех элементов 1, 2, 3 по два.

Из определения сочетаний вытекают следующие два свойства.

1°. Имеет место формула

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (2.22)$$

где

$$C_n^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1. \quad (2.23)$$

Действительно, если из n элементов выбрать какое-либо сочетание, содержащее k элементов, то элементы, не вошедшие в него, составят сочетание из $n - k$ элементов. Причем, таким путем получатся все сочетания из n элементов по $n - k$ и каждое по одному разу. Поэтому число сочетаний из n элементов по k , т.е. C_n^k , равняется числу сочетаний из n элементов по $n - k$, т.е. числу C_n^{n-k} .

2°. Имеет место формула

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.24)$$

Пусть дано $n + 1$ элементов. Зафиксируем один из элементов и разобьем все сочетания по $k + 1$ элементов на две группы: содержащие этот элемент и не содержащие его. Число первых равно C_n^k (ибо если удалить фиксированный элемент из каждого содержащего его сочетания по $k + 1$ элементов, то получатся всевозможные сочетания из n элементов по k и каждое по одному разу), число вторых равно C_n^{k+1} (ибо они образуют всевозможные сочетания по $k + 1$ элементов из n элементов, получающихся удалением фиксированного элемента из $n + 1$ заданных). Это и означает справедливость формулы (2.24).

Докажем теперь формулу для числа всевозможных сочетаний из n элементов по m .

Теорема 2 Для числа сочетаний имеет место формула

$$C_n^m = \frac{P_n}{P_m P_{n-m}} \quad (2.25)$$

Множество всех перестановок из заданных n элементов разбивается на группы, в каждой из которых на m первых местах стоят одни и те же элементы (в том или ином порядке), а следовательно, и на последних $n-m$ местах также находятся одни и те же элементы. Число таких групп равно числу способов, которыми из данных n элементов можно выбрать m элементов, т.е. равно числу C_n^m .

В перестановках, входящих в одну и ту же группу, на m первых местах выбранные элементы могут быть расположены любым способом, а число таких способов равно числу P_m всевозможных перестановок из m элементов. Элементы же, стоящие на $n-m$ последних местах, также могут находиться в любом порядке, т.е. из них может быть образована любая перестановка из $n-m$ элементов, а число таких перестановок равно P_{n-m} .

2.2 Задание 3

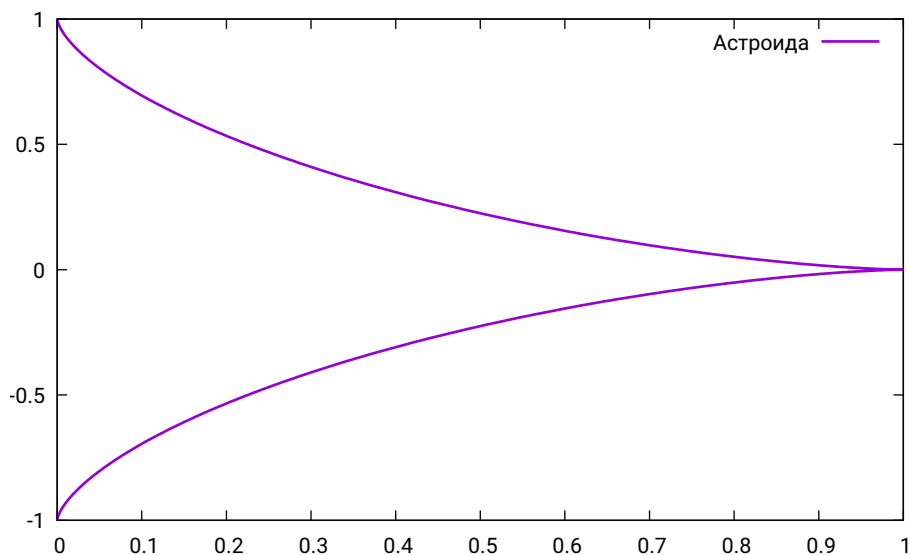


Рис. 1: Астроида