

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:
Ермолинская В.А. группа 22104

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	7

1 Описание работы

В курсе для студентов представлены 4 задания. Первое из них было ознакомительным, чтобы понять что такое и как работать со структурой LaTeX.

Второе задание было особенно полезно для меня, так как в будущем я буду писать различные работы связанные с математикой. При выполнении данного задания я попрактиковалась писать различные формулы с использованием математических символов.

В третьем задании главной целью было построить изображение кривой в декартовых координатах и разместить его в документе. Я научилась строить графики и размещать их в файле. Этот навык также очень полезен для меня, ведь графики это неотъемлемая часть математических исследований.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

25.1 Интегралы вида

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_s} \right] dx$$

Положим

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad (25.2)$$

откуда

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = p(t) \quad (25.3)$$

$p(t)$ является рациональной функцией, поэтому $p'(t)$ также рациональная функция; далее,

$$dx = p'(t)dt \quad (25.4)$$

и

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (25.5)$$

Подставляя (25.3), (25.4) и (25.5) в подынтегральное выражение рассматриваемого интеграла, получим

$$\begin{aligned} & \int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_s} \right] dx = \\ &= \int R \left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_s} \right) p'(t) dt = \int R^*(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$R^*(t) = R \left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_s} \right) p'(t),$$

очевидно, является рациональной функцией переменного t . Таким образом, вычисление интеграла

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_s} \right] dx \quad (25.6)$$

сводится к интегрированию рациональных дробей.

Отметим, что, в частности, к рассмотренному типу интегралов относятся интегралы вида

$$\begin{aligned} & \int R[x, (ax+b)^{r_1}, \dots, (ax+b)^{r_s}] dx, \\ & \int R(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_s}) dx. \end{aligned}$$

Пример. Вычислим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Полагая, согласно общему правилу,

$$x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt,$$

получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \left[\int (t^3 - t + 1) dt - \int \frac{dt}{t+1} \right] = \\ &= 6 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln |t+1| \right] + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C \end{aligned}$$

К интегралам вида (25.6) сводятся иногда с помощью элементарных преобразований и интегралы других типов. Например, если требуется вычислить интеграл

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)} dx \quad (25.7)$$

то, вынося в подынтегральной функции множитель $(x-1)$ за знак радикала, получим интеграл вида (25.6): именно при $x \geq 2$

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)} dx = \int (x-1) \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} dx,$$

а при $x < 1$

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)} dx = \int (1-x) \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} dx,$$

При $1 < x < 2$ подынтегральное выражение часто мнимое.

Рассмотрим, например, случай $x \geq 2$. Полагая здесь (см. (25.2))

$$t^2 = \frac{x-2}{x-1}$$

получим

$$x = \frac{2-t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2t \, dt}{(1-t^2)^2}.$$

Поэтому

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{2-t^2}{1-t^2} - 1 \right) \frac{2t^2 \cdot dt}{(1-t^2)^2} = 2 \int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^3},$$

получили интеграл от рациональной дроби, который был вычислен раньше (см. п. 24.2).

25.2. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$. Подстановки Эйлера.

Указанные интегралы могут быть сведены с помощью замены переменного к рациональным функциям. Рассмотрим три замены переменного, носящие название *подстановок Эйлера*. Итак, пусть дан интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx, \quad a \neq 0 \quad (25.8)$$

Первый случай: $a > 0$.

Сделаем замену x на t следующим образом:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t \quad (25.9)$$

(знаки можно убрать в любой комбинации). Возведём обе части написанного равенства в квадрат:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2xt\sqrt{a} + t^2,$$

отсюда

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}} = R_1(t),$$

$R_1(t)$ — рациональная функция от t , значит, $R'_1(t)$ также рациональная функция.

Далее, $dx = R'_1(t)dt$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm R_1(t)\sqrt{a} \pm t = R_2(t)$, где, очевидно, $R_2(t)$ — рациональная функция.

Окончательно

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx &= \\ &= \int R(R_1(t), R_2(t)) R'_1(t)dt = \int R^*(t)dx, \end{aligned}$$

где $R^*(t) = R(R_1(t), R_2(t)) R'_1(t)$ — рациональная дробь.

Второй случай: корни трёхчлена $ax^2 + bx + c$ вещественные.

Пусть x_1 и x_2 вещественны и являются корнями трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Если $x_1 = x_2$, то

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)^2} = |x - x_1|\sqrt{a}.$$

Отсюда следует, что в этом случае либо под корнем стоит отрицательная при всех значениях x величина, т.е. корень принимает мнимые значения.

2.2 Задание 3