

Определение 8. Ряд (38.16) называется сходящимся на множестве E , если при каждом фиксированном $x_0 \in E$ сходится кратный числовой ряд

$$\sum_{n_1, \dots, n_k=1}^{\infty} u_{n_1, \dots, n_k}(x_0).$$

Если ряд (38.16) сходится на E , то функция

$$S(x) = \sum_{n_1, \dots, n_k=1}^{\infty} u_{n_1} \dots n_k(x), \quad x \in E$$

называется его суммой.

На кратные функциональные ряды легко переносятся понятия равномерной сходимости ряда, критерий Коши для равномерной сходимости ряда, признак Вейерштрасса равномерной сходимости и т. п. Мы не будем на этом останавливаться.

У п р а ж н е н и е 2. Определив понятие равномерной сходимости двойного ряда, доказать, что если ряд (38.16) сходится равномерно и если его члены являются непрерывными функциями на множестве $E \subset E^n$, то и сумма ряда (38.16) является непрерывной на множестве E функцией.

Определение 9. Ряды вида

$$\sum_{n_1, \dots, n_k=0}^{\infty} c_{n_1} \dots n_k (x_1 - x_1^{(0)})^{n_k},$$

где $c_{n_1} \dots n_k$ — комплексные числа, называются кратными степенными рядами.

Хотя, как это видно из предыдущего, многие утверждения, справедливые для однократных рядов, обобщаются и на кратные ряды, последние имеют и много своих специфических особенностей, существенно отличающих их от однократных рядов.

В качестве примера приведем двойной степенной ряд, который сходится лишь в двух точках плоскости, а именно в точках $(0;0)$ и $(1;1)$. Таким образом, аналога теоремы Абеля для степенных рядов (см. п. 37.1), во всяком случае в прямом смысле, для двойных рядов нет. Этот пример показывает опасность использования аналогий, не подкрепленных математическими доказательствами.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} c_{mn} x^m y^n, \quad (38.17)$$

где

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= 0, & c_{0n} &= c_{n0} = n!, & n &= 1, 2, \dots, \\ c_{1m} &= c_{m1} = -m!, & m &= 1, 2, \dots, \\ c_{mn} &= 0, & m &\geq 2, & n &\geq 2. \end{aligned}$$

Его частичные суммы имеют вид

$$S_{mn}(x, y) = (1-y) \sum_{k=1}^m k! x^k + y + (1-x) \sum_{l=2}^n l! y^l. \quad (38.18)$$

Очевидно, что $S_{mn}(0,0) = 0$ и $S_{mn}(1,1) = 1$, $m, n = 1, 2, \dots$, и потому ряд (38.17) сходится в точках $(0,0)$ и $(1,1)$.

Заметим теперь, что радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

равен нулю (см. ряд (37.6) п. 37.1), при этом его частичные суммы

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n k! z^k, \quad n = 1, 2, \dots,$$

при вещественных $z > 0$, очевидно, стремятся к $+\infty$. Если же $z < 0$, то, объединяя попарно соседние члены, получим

$$S_{2n}(z) = \sum_{k=1}^n (2k-1)! |z|^{2k-1} (2k |z| - 1).$$

Отсюда видно, что при любом фиксированном $z < 0$ при $k > \frac{1}{|z|}$ выполняется неравенство $S_{2n}(z) > \sum_{k=1}^n (2k-1)! |z|^{2k-1}$. Легко убедиться аналогично случаю ряда (37.6) (см. п. 37.1), что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)! z^{2k-1}$ расходится при всех $z \neq 0$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}(z) = +\infty$, $z < 0$.

Из сказанного и из равенства (38.18) следует, что если $(x, y) \neq (0, 0)$ или $(x, y) \neq (1, 1)$, то, каково бы ни было число $\epsilon > 0$ и каков бы ни был номер m , всегда можно подобрать такой номер n , что

$$|S_{mn}(x, y)| > \epsilon.$$

А это означает, что ряд (38.17) расходится.

У п р а ж н е н и е 3. Число S назовем суммой ряда $\sum_{n, m=1}^{\infty} u_{nm}$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер N , что $|S - S_{nm}| < \epsilon$, если только $n+m > N$. Выяснить, эквивалентны или нет это определение и определение 5 п 38 !