

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчёт по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:

Давыдова М. Я., группа №22101

подпись

Руководитель практики:

к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	5

1 Описание работы

В курсе образовательной программы со второго семестра мы начали изучать LaTeX. LaTeX — это система набора текста, основанная на языке разметки, которая широко используется для создания научных и технических документов.

Чтобы создать PDF-документ, необходимо создать файл с расширением `.tex`. В преамбуле указывается тип документа, подключаются пакеты и расширения с дополнительными командами и функциями, новые команды, окружения, кодировка и т. д. В LaTeX используются команды для создания заголовков (*section*), разделов (*subsection*) и подразделов (*subsubsection*). Можно форматировать текст, используя `\textbf{}` для жирного текста и `\textit{}` для курсива. Математические формулы записываются в окружении `{equation}`. Ссылки на формулы и не только выполняются с помощью команды `\label{eq:}` и `\eqref{eq:}`. Также поддерживается сложная математическая нотация, включая дроби, интегралы, суммы и матрицы. Можно создавать таблицы с помощью окружения `{tabular}`.

Для создания графиков используется Gnuplot. Вводя функцию в терминал, программа выводит изображение на экран. Чтобы добавить график в PDF-файл, необходимо создать окружение для вставки `{figure}` и задать необходимые параметры.

Для компиляции документа используются следующие команды:

- `latex namefile.tex`
- `dvips -Ppdf -G0 namefile.dvi`
- `ps2pdf namefile.ps`

Для обновления PDF-файла используется команда: `pdflatex namefile.tex`

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

где

$$\sum_{j=1}^r k_j + 2 \sum_{l=1}^s m_l = n \quad (1)$$

(при перемножении многочленов их степени складываются),

$$\frac{p_l^2}{4} - q_l < 0, \quad l = 1, 2, \dots, s$$

(это следует из (3.19)), p_l, q_l - действительные числа, а k_j и m_l - натуральные, $j = 1, 2, \dots, r, l = 1, 2, \dots, s$.

3.5. Рациональные дроби. Как в случае многочленов, мы рассмотрим рациональные дроби в комплексной области. Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ - многочлены с, вообще говоря, комплексными коэффициентами и $Q(z)$ не является нулевым многочленом. Рациональная дробь $\frac{P(z)}{Q(z)}$ называется *правильной*, если степень многочлена $P(z)$ меньше степени многочлена $Q(z)$, и *неправильной*, если степень многочлена $P(z)$ не меньше степени многочлена $Q(z)$.

Всякая рациональная дробь является либо правильной, либо неправильной.

Если рациональная дробь $\frac{P(z)}{Q(z)}$ неправильная, то, произведя деление числителя на знаменатель по правилу деления многочленов, т. е. представив числитель в виде

$$P(z) = S(z)Q(z) + R(z),$$

где $S(z)$ и $R(z)$ - некоторые многочлены, причем степень многочлена $R(z)$ меньше степени многочлена $Q(z)$, получим

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{R(z)}{Q(z)}.$$

Здесь в силу уже сказанного дробь $\frac{R(z)}{Q(z)}$ является правильной.

Займемся более подробно изучением правильных рациональных дробей.

Лемма 1 Если $\frac{P(z)}{Q(z)}$ - правильная рациональная дробь и число $z_0 \in C$ является корнем кратности $k \geq 1$ ее знаменателя, т. е.

$$Q(z) = (z - z_0)^k Q_1(z), \quad Q_1(z_0) \neq 0, \quad (2)$$

то существуют единственное число $A \in C$ и многочлен $P_1(z)$ такие, что

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A}{(z - z_0)^k} + \frac{P_1(z)}{(z - z_0)^{k-1} Q_1(z)}, \quad (3)$$

где дробь $\frac{P_1(z)}{(z - z_0)^{k-1} Q_1(z)}$ также является правильной.

Если коэффициенты многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ - действительные числа и корень z_0 многочлена $Q(z)$ - также действительное число, то число A также является действительным числом, а многочлены $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ можно выбрать с действительными коэффициентами.

Отметим, что здесь у многочленов $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ единица является просто индексом, а не их степенью.

▷ Каково бы ни было число $A \in C$, прибавляя к дроби $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z - z_0)^k Q_1(z)}$ дробь $\frac{A}{(z - z_0)^k}$, а затем вычитая ее, получим

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{Q(z)} &= \frac{P(z)}{(z - z_0)^k Q_1(z)} = \frac{A}{(z - z_0)^k} + \left[\frac{P(z)}{(z - z_0)^k Q_1(z)} - \frac{A}{(z - z_0)^k} \right] = \\ &= \frac{A}{(z - z_0)^k} + \frac{P(z) - A Q_1(z)}{(z - z_0)^k Q_1(z)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Степень многочлена $P(z)$ по условию меньше степени многочлена $Q(z) = (z - z_0)^k Q_1(z)$, а степень многочлена $Q_1(z)$ меньше степени многочлена $Q(z)$, поскольку $Q(z)$ получается из $Q_1(z)$ умножением на многочлен $(z - z_0)^k \geq 1$. Поэтому при любом выборе числа $A \in C$ дробь

$$\frac{P(z) - A Q_1(z)}{(z - z_0)^k Q_1(z)} \quad (5)$$

является правильной: степень ее числителя меньше степени знаменателя.

Для того, чтобы дробь (5) имела вид

$$\frac{P_1(z)}{(z - z_0)^{k-1} Q_1(z)}, \quad (6)$$

необходимо и достаточно, чтобы ее можно было сократить на множитель $(z - z_0)$, а это можно сделать в том и только том случае, когда числитель дроби (5) делится на $(z - z_0)$, что согласно теореме Безу равносильно тому, что число z_0 является корнем многочлена, стоящего в числителе этой дроби, т. е. когда

$$P(z_0) - A Q_1(z_0) = 0.$$

Поскольку по условию $Q_1(z_0) \neq 0$, то это равносильно тому, что

$$A = \frac{P(z_0)}{Q_1(z_0)}. \quad (7)$$

При таком и только таком выборе числа A дробь (5) сократится на $(z - z_0)$, в результате в этом и только в этом случае после сокращения дроби (5) получится дробь вида (6). Подставив эту дробь в равенство (4), получим разложение (1), в котором коэффициент A однозначно определен.

Если корень z_0 , а также коэффициенты многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ являются действительными числами, то из равенства (2) следует, что и многочлен $Q_1(z)$ имеет действительные коэффициенты. Поэтому в силу формулы (7) число A оказывается действительным, откуда следует, что все коэффициенты многочленов, стоящих в числителе дроби (5), - также действительные числа. Следовательно, сокращая эту дробь на множитель $(z - z_0)$, имеющий действительные коэффициенты, можно записать результат в виде рациональной дроби, у которой в числителе и знаменателе стоят многочлены с действительными коэффициентами. $\triangleleft$

Теорема 1 Если $\frac{P(z)}{Q(z)}$ - правильная рациональная дробь и

$$Q(z) = (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_N)^{k_N}, \quad (8)$$

где $z_1, z_2, \dots, z_N$ - попарно различные корни многочлена $Q(z)$, то существуют единственные комплексные числа $A_j^{(1)}, A_j^{(2)}, \dots, A_j^{(k_j)}, j = 1, 2, \dots, N$, такие, что

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{A_j^{(1)}}{z - z_j} + \frac{A_j^{(2)}}{(z - z_j)^2} + \dots + \frac{A_j^{(k_j)}}{(z - z_j)^{k_j}} \right]. \quad (9)$$

▷ Применив последовательно k_1 раз лемму к дроби $\frac{P(z)}{Q(z)}$ при $z_0 = z_1$, получим

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{Q(z)} &= \frac{A_1^{(k_1)}}{(z - z_1)_1^{k_1}} + \frac{P_1(z)}{(z - z_1)^{k_1-1} Q_1(z)} = \\ &= \frac{A_1^{(k_1)}}{(z - z_1)_1^{k_1}} + \frac{A_1^{(k_1-1)}}{(z - z_1)_1^{k_1-1}} + \frac{P_2(z)}{(z - z_1)^{k_1-2} Q_2(z)} = \dots \\ &\dots = \frac{A_1^{(k_1)}}{(z - z_1)_1^{k_1}} + \frac{A_1^{(k_1-1)}}{(z - z_1)_1^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(1)}}{z - z_1} + \frac{P^*(z)}{Q^*(z)}, \end{aligned}$$

где комплексные числа $A_1^{(k_1)}, \dots, A_1^{(1)}$ определяются последовательно единственным образом, $P^*(z)$ и $Q^*(z)$ - многочлены, причем $\frac{P^*(z)}{Q^*(z)}$ - правильная рациональная дробь и

$$Q^*(z) = (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_N)^{k_N}.$$

Применив теперь аналогичным образом последовательно k_2 раз лемму 1 к дроби $\frac{P^*(z)}{Q^*(z)}$ при $z_0 = z_2$, затем k_3 раз при $z_0 = z_3$ и т. д., k_N раз при $z_0 = z_N$, получим формулу (9). $\triangleleft$

Докажем еще одну лемму для правильных рациональных дробей, в числителях и знаменателях которых стоят многочлены с действительными коэффициентами.

2.2 Задание 3

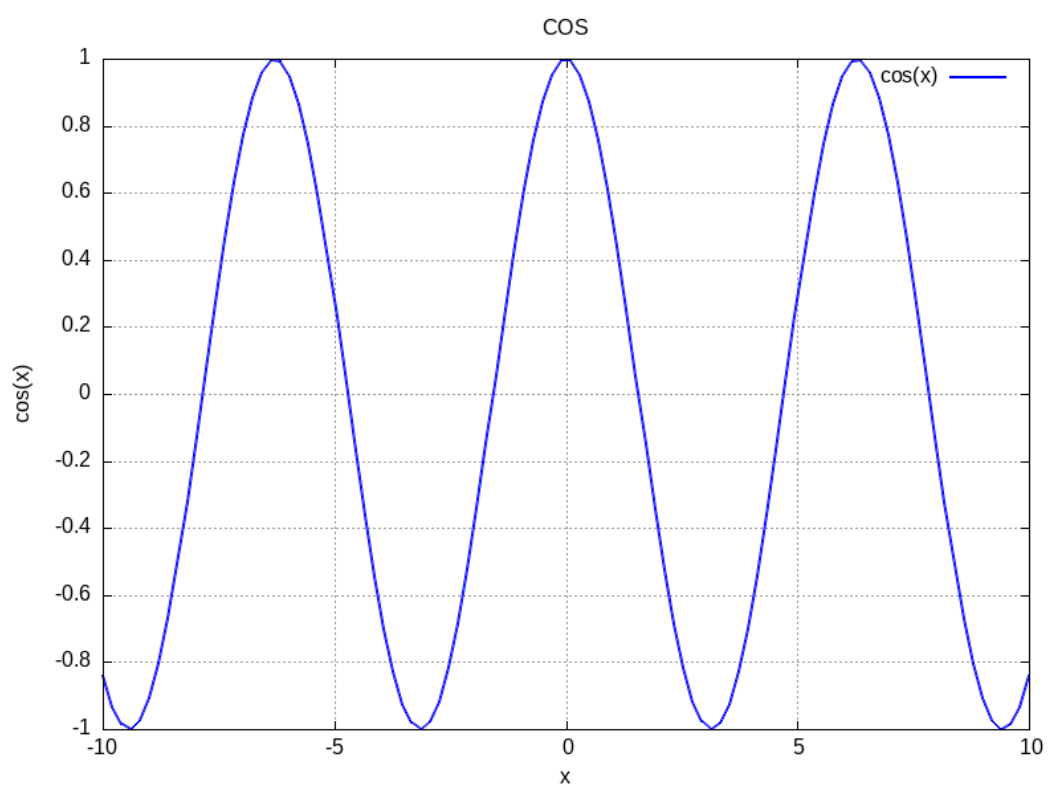


Рис. 1: График $y = \cos(x)$.