

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Б.И. Чернобай, группа 22103

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	7

1 Описание работы

В течение семестра, на занятиях по дисциплине "Компьютерные технологии в математике", я сумел освоить инструменты набора и трансляции математических текстов с помощью издательской системы LaTeX и овладел инструментами построения научных графиков с помощью системы Gnuplot.

Работа с LaTeX и Gnuplot подарила мне ценные навыки, расширившие мой арсенал инструментов для создания качественных документов и визуализации данных. LaTeX позволил мне овладеть искусством структурирования текстов, грамотно используя заголовки, разделы, списки, таблицы и сноски. Я научился создавать документы, которые выглядят профессионально и привлекательно, используя различные шрифты, стили оформления и эффективно вставляя математические формулы.

Gnuplot же превратился в мощный инструмент для визуализации данных. Я освоил построение различных типов графиков. Благодаря Gnuplot я научился импортировать, обрабатывать и фильтровать данные, создавая информативные и эстетичные графики. Опыт работы с LaTeX и Gnuplot увеличил мои возможности в научной деятельности, позволяя мне самостоятельно создавать технические документы с включением формул, стилей оформления и графиков, что особенно важно для моей будущей работы и учебы.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Из теоремы об односторонних пределах (см. п. 4.5) следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0 , имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ существуют и $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. В этом случае $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Если функция $f(x)$ определена на некотором промежутке и в каждой его точке существует производная (причем под производной в его конце, который принадлежит промежутку, естественно, понимается соответствующая односторонняя производная), то она, очевидно, также является функцией, определенной на данном промежутке; ее обозначают через $f'(x)$. Если $y = f(x)$, то вместо $f'(x_0)$ пишут также $y'|_{x=x_0}$.

Вычисление производной от функции называется *дифференцированием*.

Примеры. 1. $y = c$ (c - постоянная).

Так как $\Delta y = c - c = 0$, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ и, таким образом

$$c' = 0.$$

2. $y = \sin x$. Имеем

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

и поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Таким образом

$$(\sin x)' = \cos x.$$

3. $y = \cos x$. Так как

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos(x) = -2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

то будем иметь

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = - \sin x.$$

Таким образом,

$$(\cos x)' = - \sin x.$$

$y = a^x$. Имеем $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$, а поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

откуда, в силу формулы (8.17), получаем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Таким образом $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности,

$$(e^x)' = e^x$$

Последнее равенство показывает, что число e обладает замечательным свойством: показательная функция с основанием e имеет производную, совпадающую с самой функцией. Этим и объясняется то обстоятельство, что в математическом анализе в качестве основания степени и основания логарифмов используется преимущественно число e . Это очень удобно, так как упрощает вычисления.

5. $y = x^n$, n -натуральное число. Используя правило возведения бинома в степень, находим

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + \Delta x^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \dots + \Delta x^{n-1}$$

Так как при $\Delta x \rightarrow 0$ все слагаемые правой части, содержащие множитель Δx в степени с натуральным показателем, стремятся к нулю, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$; таким образом,

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

В дальнейшем мы увидим, что эта формула справедлива и тогда, когда n - произвольное действительное число.

9.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Определение 3. Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0 , называется дифференцируемой при $x = x_0$, если ее приращение в этой точке

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x = x - x_0$$

представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \tag{9.2}$$

где A - постоянная *) и $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Линейная функция $A\Delta x$ (от Δx) называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или, короче, dy .

Таким образом,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0 \tag{9.3}$$

$$dy = A\Delta x. \tag{9.4}$$

Заметим, что дифференциал $dy = A\Delta x$, как и всякая линейная функция, определен для любого

*) При фиксированном x_0 A есть некоторое число, не зависящее от Δx ; конечно, при изменении точки x_0 число A , вообще говоря, меняется.

значения $\Delta x : -\infty < \Delta x < +\infty$, в то время как приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, естественно, можно рассматривать только для таких Δx , для которых $x_0 + \Delta x$ принадлежит области определения функции f .

Если $A \neq 0$, т. е. если $dy \neq 0$, то дифференцируемость функции в точке x_0 означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение аргумента Δx , приращение функции Δy является линейной функцией от Δx . Используя терминологию п. 8.4, можно сказать, что главная часть приращения функции Δy в точке x_0 является линейной функцией относительно Δx ; при этом приращение Δy и дифференциал dy - эквивалентные бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$ (см. п. 8.3).

Если же $A = 0$, т. е. $dy \equiv 0$, то $\Delta y = o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Таким образом, при $A = 0$ приращение Δy является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx , когда $\Delta x \rightarrow 0$.

Для большей симметрии записи дифференциала приращение Δx обозначают dx и называют его дифференциалом независимого переменного. Таким образом, дифференциал можно записать в виде

$$dy = A dx$$

Пример. Найдем дифференциал функции $y = x^3$.

В этом случае

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ главная линейная часть выражения, стоящего справа, равна $3x^2 \Delta x$; поэтому $dy = 3x^2 dx$.

Пусть $f(x_0^*) = y_0$. Подставив в (9.3) значения $\Delta y = f(x) - y_0$, $\Delta x = x - x_0$, $dy = A(x - x_0)$, получим

$$f(x) = y_0 + A(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0. \quad (9.5)$$

Итак, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $x - x_0$, вблизи x_0 , она равна линейной функции; иначе говоря, в этом случае функция f в окрестности точки x_0 ведет себя «почти как линейная функция»

$$y_0 + A(x - x_0)$$

причем погрешность при замене функции f этой линейной функцией будет тем меньше, чем меньше разность $x - x_0$, и, более того, отношение этой погрешности к разности $x - x_0$ стремится к нулю при $x \rightarrow x_0$.

Если функция f дифференцируема в каждой точке некоторого интервала, то ее дифференциал является функцией двух переменных - точки x и переменной dx :

$$dy = A(x) dx$$

2.2 Задание 3

График реализован в утилите Gnuplot

$\sin(x)$ — плоская кривая, заданная в прямоугольной системе координат

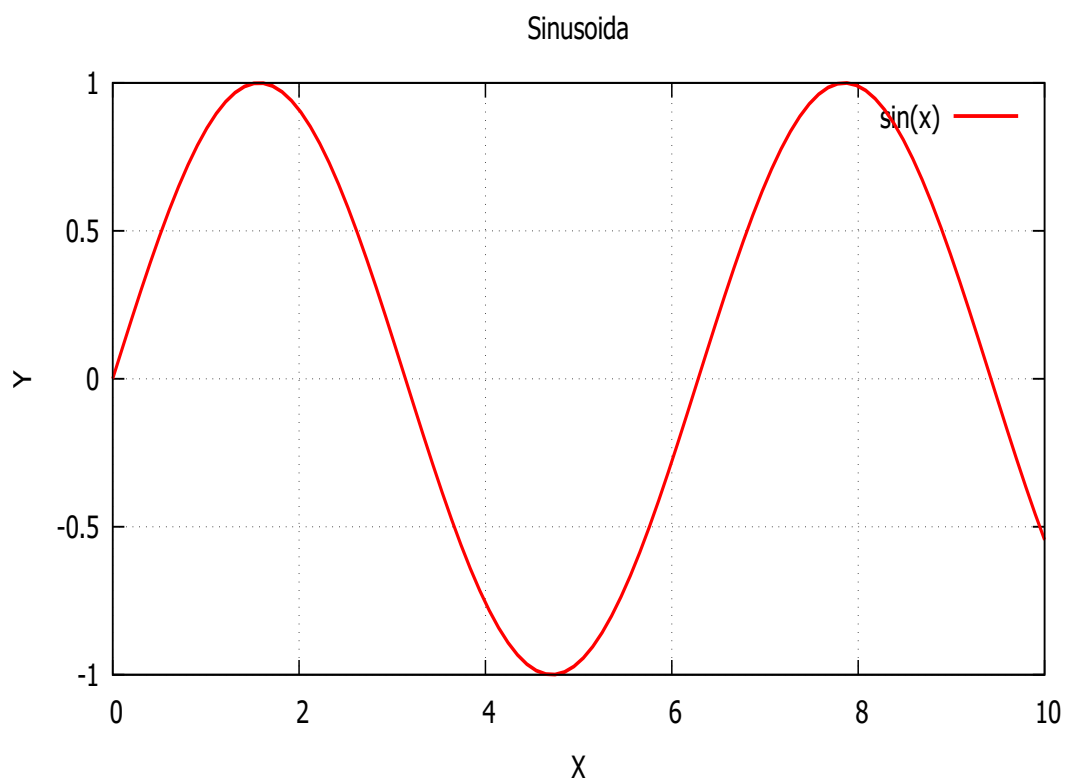


Рис. 1: Синусоида