

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Твердохлебов Н. С. Группа 22103

подпись

Руководитель практики:
Е. И. Рыбин

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	8

1 Описание работы

Краткое описание заданий и путей их выполнения [более 600 знаков с пробелами] Использование программы LaTeX позволяет создавать профессионально оформленные учебные материалы, научные работы, презентации, таблицы, графики и формулы. Создание и форматирование документов становится более удобным благодаря этой программе.

Для верстки математических текстов в LaTeX нужно применять специальные команды и окружения для ввода формул. Например, для включения формулы в текст используется символ "\$". Чтобы выделить формулу на новой строке, используется окружение "equation". Также можно использовать различные математические команды, символы и операторы. После ввода математических формул документ на LaTeX компилируется с помощью программы, такой как компилятор LaTeX.

Для построения графика функции в декартовых координатах с использованием gnuplot нужно подготовить скрипт с данными о функции, её характеристиками и настройками отображения. Затем необходимо выполнить скрипт в интерпретаторе gnuplot, чтобы построить график. Чтобы вставить изображение в LaTeX-документ, можно воспользоваться командой "includegraphics указав путь к файлу с изображением.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Заметив, что $\iint_G dx dy = \mu G$, получим

$$\mu G = \iint_G dx dy \stackrel{(45.81)}{=} \int_{\partial G+} x dy. \quad (45.86)$$

Аналогично, при $P = -y$, $Q = 0$

$$\mu G = \iint_G dx dy = - \int_{\partial G+} y dy. \quad (45.87)$$

Из равенств (45.86) и (45.87) следует формула

$$\mu G = \frac{1}{2} \int_{\partial G+} x dy - y dx. \quad (45.88)$$

П р и м е р. Вычислим с помощью формулы (45.88) площадь S , ограниченную эллипсом

$$x = \alpha \cos t, y = \beta \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi \quad (45.89)$$

Применив формулу (45.88), получим

$$S \frac{1}{2} \int_{\partial G+} x dy - y dx = \frac{1}{2} \alpha \beta \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi \alpha \beta. \quad (45.90)$$

45.7 Геометрический смысл знака якобиана отображения плоской области. Пусть

$$x = x(u, v), y = y(u, v) \quad (45.91)$$

- непрерывно, дифференцируемое отображение F плоской области $G \subset R_{uv}^2$ в плоскость R_{xy}^2 с якобианом, не равным нулю на G . Тогда якобиан в силу его непрерывности сохраняет знаки на G (см. замечание в п.35.2), т.е. либо всюду на G положителен, либо всюду отрицателен.

Лемма 3. Если Γ - кусочно гладкая кривая, лежащая в области G , то её образ $F(\Gamma)$ при отображении F также является кусочно гладкой кривой.

▷ Пусть сначала Γ - гладкая кривая т.е. непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек, и пусть $u = u(t)$, $v = v(t)$, $u^2(t) + v^2(t) > 0$, $\alpha \leq t \leq b$, некоторое её представление. Тогда представлением кривой $F(\Gamma)$ является пара функций

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad \alpha \leq t \leq b \quad (45.92)$$

Кривая $F(\Gamma)$ в силу непрерывности композиции непрерывных функций и правила дифференцирования композиции функций является непрерывно дифференцируемой кривой. Покажем, что эта кривая также не имеет особых точек. В самом деле,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \quad (45.93)$$

Рассматривая эти неравенства как систему линейных уравнений относительно производных $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$, видим, что если в некоторой точке $t \in [a, b]$ выполнялись равенства $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$. То в силу необращения в нуль якобиана

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (45.94)$$

указанная система имела бы единственное решение, которым является нулевое решение, т.е. в той же точке t были бы справедливы равенства $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$. Тем самым, соответствующая точка кривой Γ была бы также особой, что противоречит сделанному предположению. Итак, если кривая гладкая, то её образ при отображении F также гладкий. Отсюда сразу следует, что образ кусочно гладкой кривой при рассматриваемом отображении является кусочно гладкой кривой, ибо кусочно гладкая кривая представляет собой объединение конечного множества гладких кривых $\triangleleft$

Пусть теперь D - ограниченная область ограниченная область, лежащая вместе со своим замыканием в области G . Пусть границей ∂D области D является простой замкнутый кусочно гладкий контур, $D \subset \bar{D} = D \cup \partial D \subset G$. Пусть, далее, $D^* = F(D)$. Тогда в силу принципа сохранения области (см. теорему 4 в п. 40.5) Множество D^* как раз области также является областью.

Будем в дальнейшем предполагать, что отображение F взаимно однозначно отображает область G на $G^* = F(G)$. Тогда граница ∂D области D отображается на границу ∂D^* образа D^* области D (см. (44.4) в п. 44.2). Поэтому согласно лемме 3 граница ∂D^* также является простым кусочно гладким контуром. Следовательно, по контурам $\Gamma = \partial D$ и $\Gamma^* = \partial D^*$ можно брать криволинейные интегралы.

Обозначим, как обычно, через Γ^+ положительно ориентированный контур Γ . Пусть

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (45.95)$$

— представление контура Γ^+ и, следовательно,

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad a \leq t \leq b \quad (45.96)$$

— некоторое представление ориентированного контура Γ^* .

Будем ещё дополнительно предполагать, что у координатной функции $y(u, v)$ отображения F существуют смешанные производные $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$ и что они непрерывны и, следовательно, равны друг другу во всех точках области G .

согласно формуле (45.86)

$$\mu D^* = \varepsilon \int_{\Gamma^*} x dy \quad (45.97)$$

где $\varepsilon = +1$, если ориентация контура Γ^* положительная, и $\varepsilon = -1$, если она отрицательная. Иначе говоря, $\varepsilon = +1$, если положительному обходу контура Γ соответствует при отображении F положительной же обход контура Γ^* , и $\varepsilon = -1$, если положительному обходу контура Γ соответствует отрицательный обход контура Γ^* .

Выясним связь знака ε со знаком якобиана $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ отображения F .

Преобразовав интеграл (45.91) по формуле (45.19) и используя представление (45.90) контура Γ^* , получим

$$\mu \bar{D} = \varepsilon \int_2^b zy' dt = \varepsilon \int_2^b x \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt = \varepsilon \int_{\Gamma} x \frac{\partial y}{\partial u} du + x \frac{\partial y}{\partial v} dv. \quad (45.98)$$

К получившемуся интегралу применим формулу Грина (см. (45.81)), положив $P = x \frac{\partial y}{\partial u}$, $Q = x \frac{\partial y}{\partial v}$ и заметив, что в этом случае

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial v} + x \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \quad (45.99)$$

(здесь используется предположенное выше существование непрерывных вторых смешанных производных $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$), Будем иметь

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \quad (45.100)$$

откуда

$$\mu D^* = \varepsilon \int_{\Gamma^*} P du + Q dv = \varepsilon \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv = \varepsilon \iint_D \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv. \quad (45.101)$$

Левая часть этого равенства больше нуля, поэтому правая его часть также положительна, а так как якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ отображения F не меняет знака, то это возможно лишь в том случае, когда $\varepsilon \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$, т.е. когда число ε имеет тот же знак, что и якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

Сопоставив это со сказанным выше о знаке числа ε , получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Если якобиан взаимно однозначно непрерывно дифференцируемого отображения плоской области положителен во всех

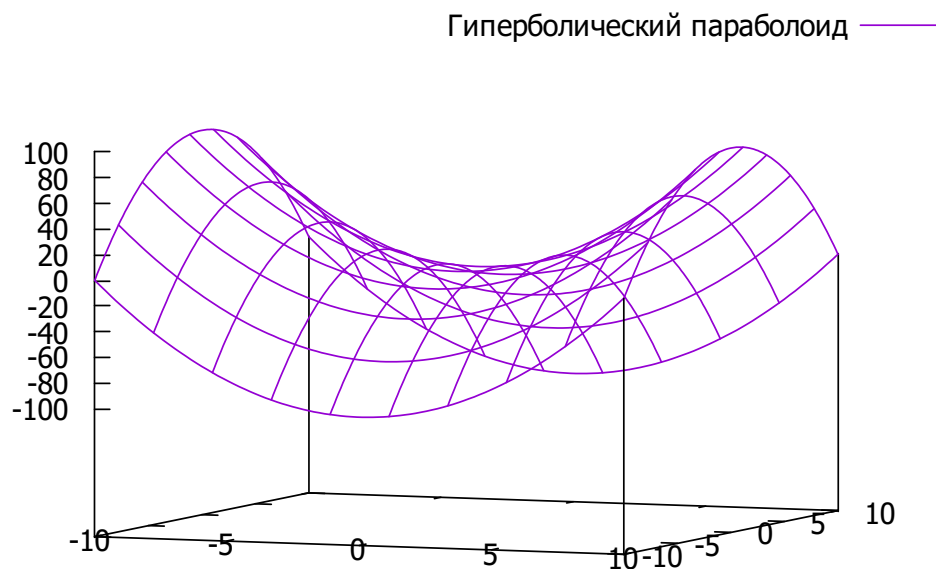


Рис. 1: Третья лабораторная

2.2 Задание 3

Gnuplot

$x^{**2} - y^{**2}$ — гиперболический параболоид

Гиперболический параболоид —

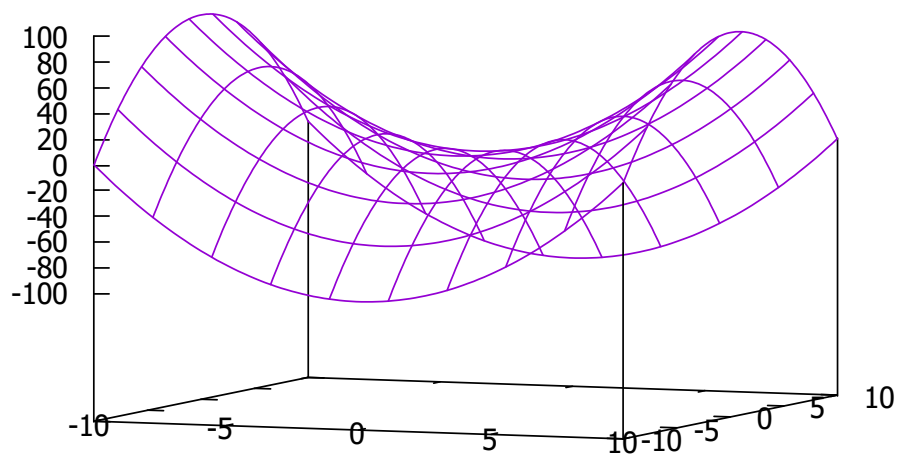


Рис. 1: Третья лабораторная