

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил: Соловей Михаил. Группа
22103 _____

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	6

1 Описание работы

Цель курса "Компьютерные технологии в математике" заключалась в освоении навыков использования издательской системы LaTeX для создания и преобразования математических текстов, а также в овладении инструментами для построения научных графиков с помощью системы Gnuplot.

В ходе обучения я освоил процесс трансляции файлов LaTeX в различные форматы и использования разнообразных возможностей форматирования текста, предоставляемых LaTeX. Кроме того, я изучил, как с помощью инструмента для создания 2D и 3D моделей Gnuplot внедрять их в свои проекты.

Эти новые знания позволят мне создавать технические тексты самостоятельно, включая использование различных формул, стилей оформления и графиков функций. Освоение LaTeX и Gnuplot расширило мой арсенал инструментов в области математического моделирования и научной визуализации, что будет полезно в моей будущей работе и учебе.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

причем, слагаемые его правой части не пересекаются. Поэтому, используя аддитивность меры, получим

$$\mu X = \sum_{j=1}^j \mu X_j^* + \mu X^* = \sum_{j=1}^j \mu X_j^* = \sum_{j=1}^j \mu X_j$$

Лемма 7. У всякого измеримого множества существуют разбиения сколь угодно малой мелкости.

Пусть X - измеримое множество, $X \subset R^n$. Обозначим через $X_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \dots, j_k$, всевозможные непустые пересечения кубов ранга k с множеством X . Таким образом, для каждого $j = 1, 2, \dots, j_k$ существует такой куб ранга k , обозначим его $Q_j^{(k)}$, что

$$X_j^{(k)} = X \cap Q_j^{(k)} \neq \emptyset \quad \text{Система множеств } \tau_k = \{X_j^{(k)}\}_{j=1}^{j_k}$$

образует разбиение множества X . Действительно, множества $X_j^{(k)}$ измеримы как пересечение двух измеримых множеств X и $Q_j^{(k)}$, их объединение составляет множество:

$$X = \bigcup_{j=1}^{j_k} X_j^{(k)}$$

Пересечения множеств $X_j^{(k)}$ имеют меру нуль. В самом деле, при $i \neq j$ имеем

$$X_i^{(k)} \cup X_j^{(k)} \subset Q_i^{(k)} \cup Q_j^{(k)} \subset \delta Q_i^{(k)} \cup \delta Q_j^{(k)},$$

и так как для любого куба мера его границы равна нулю, то

$$\mu(X_i^{(k)} \cap X_j^{(k)}) \mu(\delta Q_i^{(k)} \cap Q_j^{(k)}) \mu \delta Q_i^{(k)} = 0, i \neq j$$

Мелкость разбиения τ_k стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\tau_k| = 0$$

Это следует из того, что диаметр n -мерного куба ранга k равен $\frac{\sqrt{n}}{10^k}$

$$|\tau_k| = \max \text{diam} X_1^{(k)} \text{diam} Q_1^{(k)} = \frac{\sqrt{n}}{10} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

42.4 Интегральные суммы. Определение кратного интеграла

Пусть на измеримом множестве $X \subset R^n$ определена функция f , $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_r}$ - разбиение множества X , $\xi^{(j)} \in X_j$, $j = 1, 2, \dots, j_r$, и $\sigma_\tau \equiv \sigma_\tau(f) \equiv \sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(j_r)}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{j_r} f(\xi^{(j)}) \mu X_j$.

Всякая сумма этого вида называется интегральной суммой Римана функции f , соответствующей разбиению τ .

Определение 2. Функция f называется *интегрируемой* по Риману на множестве X , если один и тот же конечный предел имеет любая последовательность интегральных сумм

$$\sigma_{\tau_m} = \sum_{j=1}^{j_m} f(\xi^{(j,m)}) \tau X_j^{(m)},$$

соответствующих разбиениям $\tau_m = \{X_j^{(m)}\}_{j=1}^{j_m}$ множества X , у которых их мелкость $|\tau_m|$ стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\tau_m| = 0,$$

а точки $\xi^{(j,m)}$ выбраны произвольным образом в множествах $X_j^{(m)}$:

$$\xi^{(j,m)} \in X_j^{(m)}, j = 1, 2, \dots, j_m, m = 1, 2, \dots$$

Этот предел, если он существует, называется интегралом Римана от функции f по множеству X и обозначается

$$\int_X f(x) dx$$

Таким образом,

$\int_X f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \delta_{\tau_m}(f : \xi^{(1,m)}, \dots, \xi^{(j_m,m)})$. (42.79) Условие (69) равносильно тому, что число, обозначаемое $\int_X f(x) dx$, которое удовлетворяет следующему условию: каково бы ни было $\epsilon > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\tau \{X_j\}_{j=1}^{j_r}$ множества X мелкости $|\tau| < \delta$ и при любом выборе точек $\xi^{(j)} \in X_j$, $j = 1, 2, \dots, j_r$, имеет место неравенство

$$|\int_X f(x) dx - \delta_\tau(f : \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(j_r)})| < \epsilon$$

Доказательство эквивалентности условий (42.79) и (42.80) проводится аналогично доказательству эквивалентности определения предела функции в терминах последовательности и в терминах окрестностей (см. п.6.4).

Упражнение 3. Доказать эквивалентность условий (42.79) и (42.80).

Выполнение условия (42.79), или, что равносильно, условия (42.80), коротко записывают равенством

$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \delta_\tau = \int_x f(x) dx$ (42.80) и говорят, что интеграл $\int_x f(x) dx$ является пределом интегральных сумм δ_τ при $|\tau| \rightarrow 0$. Множество X , по которому производится интегрирование, часто называют областью интегрирования. Вместо "функция, интегрируемая по Риману" и "интеграл Римана" будем для краткости говорить просто "интегрируемая функция" и "интеграл". Если $n > 1$, то интеграл $\int_x f(x) dx$ называется кратным интегралом. Его обозначают также

$$\int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

В случае $n = 2$ он называется двойным, в случае $n = 3$ - тройным интегралом, а в случае произвольного $n \in \mathbb{N}$ - n кратным.

Замечание 1 Интегральные суммы являются функциями, аргументами которых являются разбиения τ и точки $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, j_\tau$, лежащие в элементах этих разбиений. Однако предел интегральных сумм это не предел функции, а принципиально новое понятие. При переходе к пределу интегральных сумм их аргументы τ и $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, j_\tau$, изменяются, но ни к чему не стремятся, и здесь нельзя, как в случае предела функции, указать "точку" $(\tau, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(j_\tau)})$, в которой берется предел интегральных сумм.

Замечание 2 Можно показать, что в случае $n = 1$ и $X = [a, b]$ (т.е. когда X - отрезок) определения интеграла по отрезку в смысле ранее данного определения в п. 32.1 (т.е. когда рассматривались интегральные суммы, соответствующие только разбиению отрезка на отрезки) и в смысле определения этого пункта (т.е. когда рассматриваются интегральные суммы, соответствующие разбиению отрезка на произвольные измеримые множества) равносильны, т.е. приводят к одному и тому же понятию интеграла.

Замечание 3 В дальнейшем нам не раз придется встречаться с пределами типа (42.81) в несколько более простой ситуации, а именно, когда задана некоторая функция $F(\tau)$, определена на множестве всех разбиений τ некоторого измеримого множества X (таким образом, здесь $F(\tau)$ зависит только от τ , в отличие от интегральных сумм, некоторые зависят еще от точек $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, j_\tau$).

2.2 Задание 3

При работе с графиками я использовал бесплатную утилиту gnuplot

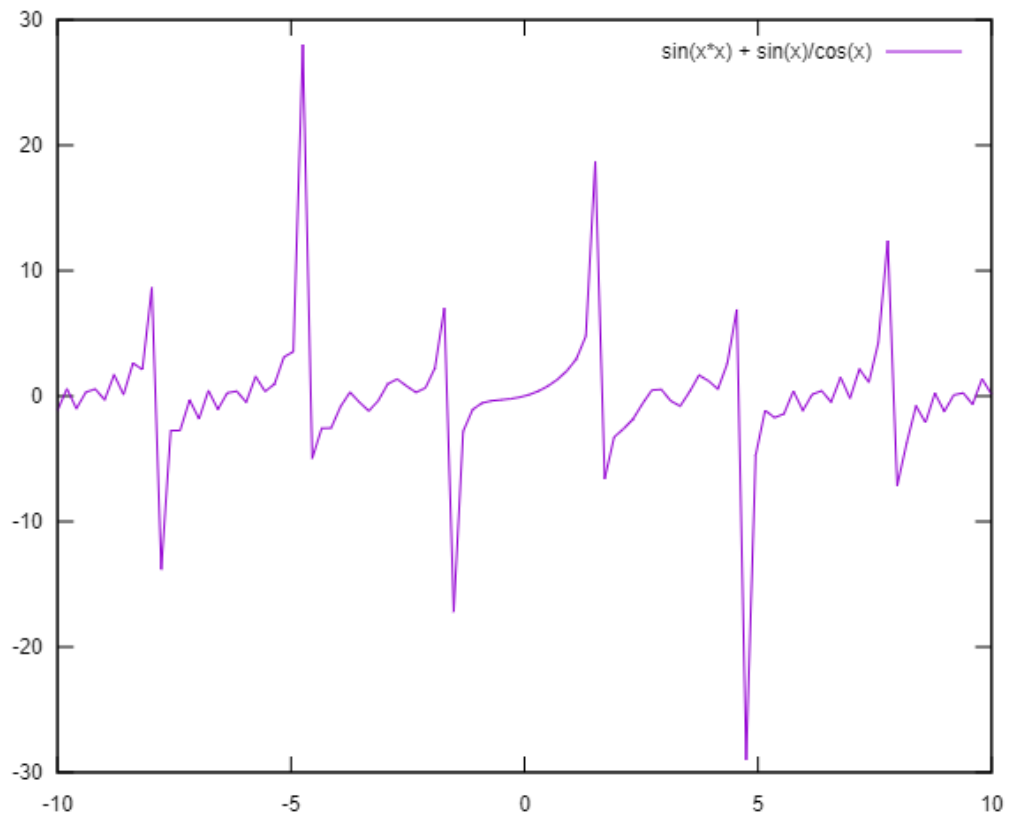


Рис. 1: $\sin(x * x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$