

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Соколов М.А., группа №22104

подпись

Руководитель практики:
преподаватель И.В. Сосновский

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	7

1 Описание работы

Учебная практика позволяет овладеть системой вёрстки *LaTeX* путём набора специально выбранных фрагментов текста учебника по матанализу. Во время практики были получены навыки набора математических формул и символов, использования окружений для форматирования текста, а также общих стандартов оформления страниц и текста в целом. За время работы получено обзорное представление о назначении различных пакетов *LaTeX*.

Полезным также оказалось изучение программы *GNUPLOT*, которая позволяет отрисовывать графики в разных форматах и автоматически генерировать *LaTeX* код для вставки графических объектов непосредственно в документ.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

§49. Интегралы, зависящие от параметра

49.1. Равномерная сходимость по параметру семейства функций. Пусть X – произвольное множество, $Y \subset R^n$, y_0 – либо точка пространства R^n , либо $y_0 = \infty$, причём любая окрестность y_0 пересекается со множеством Y (т.е. y_0 – конечная либо бесконечно удалённая точка прикосновения множества Y). Пусть, далее, функция $f(x, y)$ задана на произведении $X \times Y$, а функция $\varphi(x)$ на множестве X (рис. 187, на котором X – отрезок на оси x , Y – числовое множество на оси y , а y_0 – его предельная точка).

При каждом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x, y)$ является функцией от x , поэтому функцию f иногда называют *семейством указанных функций от x с параметром y* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функции семейства $f(x, y)$ называются равномерно стремящимися на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \rightarrow y_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0 , что для всех $x \in X$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство:

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad (1)$$

В этом случае будем писать

$$f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad y \rightarrow y_0. \quad (2)$$

Здесь, как и обычно при предельном переходе, возможны случаи $y_0 \in Y$ и $y_0 \notin Y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если имеет место равномерная сходимость (2) и y_n такая последовательность точек $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \dots$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0, \quad (3)$$

то последовательность функций

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y_n) \quad (4)$$

равномерно стремится на множестве X к функции φ при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ в силу условия (2) найдётся такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0 , что для неё будет выполняться неравенство (1). Согласно же условию (3) существует такое n_0 , что для всех $n > n_0$, будет иметь место включение

$$y_n \in U(y_0) \cap Y, \quad (5)$$

и, следовательно, для всех $x \in X$ при $n > n_0$ получим

$$|f_n(x) - \varphi(x)| \underset{(4)}{=} |f(x, y_n) - \varphi(x)| \underset{(5)}{<} \varepsilon \underset{(1)}{}$$

Это и означает, что

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА 1. Для того, чтобы имело место равномерная сходимость (2), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \sup_x |f(x, y) - \varphi(x)| = 0 \quad (6)$$

▷ 1. Если выполняется условие (2), то согласно определению для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0 , что для всех $x \in X$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдя в этом неравенстве к верхней грани $x \in X$, получим, что для произвольно заданного $\epsilon > 0$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ имеет место неравенство:

$$\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Это и означает выполнение условия (6).

2. Если же выполнено условие (6), то для произвольно фиксированного $\epsilon > 0$ существует такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0 , что для всех $y \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| < \epsilon,$$

а следовательно, для всех $x \in X$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ – неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \epsilon,$$

т.е, выполняется условие (2). $\triangleleft$

Теорема 1 (Критерий Коши) *Для того, чтобы имела место равномерная сходимость (2), необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0 , что для всех $x \in X$ и всех $y' \in U(y_0) \cap Y$, $y'' \in U(y_0) \cap Y$ выполнялось неравенство*

$$|f(x, y'') - f(x, y')| < \epsilon. \quad (7)$$

$\triangleright$ 1. Если выполняется условие (2), то для любого $\epsilon > 0$ существует такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0 , что для всех $x \in X$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Следовательно, если $x \in X$, $y' \in U(y_0) \cap Y$ и $y'' \in U(y_0) \cap Y$, то

$$|f(x, y'') - f(x, y')| \leq |f(x, y'') - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x, y')| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

т.е, выполняется условие (7).

2. Если выполняется условие (7), то при любом фиксированном x функция $f(x, y)$ переменного y удовлетворяет критерию Коши существования предела функции, и потому существует $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$. Переходя к пределу в неравенстве (7) при $y \rightarrow y_0$, получим, что для любого $x \in X$ и любого $y' \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - f(x, y')| \leq \varepsilon$$

что равносильно выполнению условия (2). $\triangleleft$

ПРИМЕР. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на конечном прямоугольнике

$$P = (x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, \\ -\infty < a < b < +\infty, \quad -\infty < c < d < +\infty$$

то при любом $y_0 \in [c, d]$ имеем

$$f(x, y) \xrightarrow{[a, b]} f(x, y_0), \quad y \rightarrow y_0.$$

Это сразу следует из того, что непрерывная на прямоугольнике P функция является и равномерно непрерывной на нём. В самом деле тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что как только $|x - x'| < \delta$, $|y - y'| < \delta$, $(x, y) \in P$, $(x', y') \in P$, то

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon,$$

Откуда при $x = x'$ и $y = y_0$ получим: если $|y - y_0| < \delta$, то для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon.$$

49.2. Свойства интегралов, зависящих от параметра. Пусть на множестве Y определены функции φ и ψ , $\varphi(y) \leq \psi(y)$, $y \in Y \subset R^n$, а на множестве $\{(x, y) : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), y \in Y\}$ — функция $f(x, y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx, \tag{8}$$

в частности, интегралы

$$\Phi(y) = \int_b^a f(x, y) dx, \tag{9}$$

называются интегралами, зависящими от параметра y .

Если $y = (y_1, \dots, y_n)$, то интеграл (8) называют также *интегралом от n параметров $y = (y_1, \dots, y_n)$* .

Подстановка $x = \varphi(y) + [\psi(y) - \varphi(y)]t$, $0 \leq t \leq 1$, сводит интеграл вида (8) к интегралу вида (9) (рис. 188). Это было использовано при доказательстве леммы в п. 43.1.

Рассмотрим вопросы о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, и о его пределе при стремлении параметра к некоторому значению. Нам уже известно (лемма из п. 49.1.) следующее утверждение.

Теорема 2 Пусть функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[c, d]$, $\varphi(y) \leq \psi(y)$, $-\infty < c \leq y \leq d < +\infty$. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве

$$E = \{(x, y) : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), c \leq y \leq d\}, \quad (10)$$

то функция $\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$ непрерывна на отрезке $[c, d]$.

2.2 Задание 3

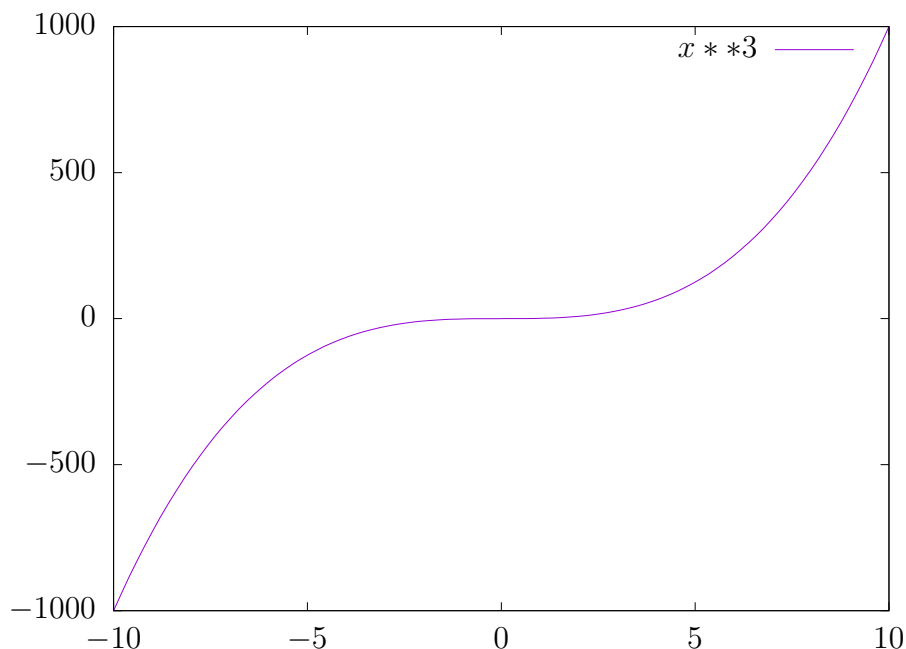


Рис. 1: x^3