

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Самсонов И. А. группа 22101

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
1.1	Задание 2	3
1.2	Задание 3	3
2	Результаты работы	4
2.1	Задание 2	4
2.2	Задание 3	7

1 Описание работы

Вот и подошёл к концу курс по дисциплине LaTeX. Благодаря этому курсу, я нашел хорошую замену Microsoft Office Word в сфере работы с математическими формулами и знаками. Преподаватель Богоявленская Ольга Юрьевна, при помощи двух лабораторных работ научила нас, как именно работать с LaTeX(TeX), показала, как можно построить график, добавить изображение в документ. Также, теперь мы умеем правильно оформлять страницы, создавать окружения для теорем и определений и многое другое.

Суть первого задания заключалась в создании математического текста - а именно нужно было написать один из параграфов учебника по курсу Математического анализа. На первый взгляд, задание показалось сложным. Но уже позже, изучив теорию к LaTeX по учебникам, предоставленным преподавателем и просмотрев скринкасты - уроки по работе с формулами, стало гораздо легче работать. Во время выполнения этого задания я изучил, какими командами можно написать математические символы в TeX'e. Далее, рассмотрев специальные окружения программы, я добавлял к тексту теоремы и леммы, оформленные автоматически. Благодаря командам, встроенным в TeX, стало гораздо легче оформлять нумерацию формул, встречаемых в тексте. В конце выполнения задания мною была проделана еще одна сложная часть работы - добавление колонтитулов к тексту, включение названий параграфа и глав в документ. В целом, задание было очень интересным, и, думаю, в будущем, навыки, полученные во время выполнения данной задачи, помогут правильно и легко работать с курсовыми работами.

Суть второй задачи - вставка в документ рисунка(а именно, графика определенной функции), нарисованного с помощью интерпретатора Gnuplot. И опять, с помощью скринкастов преподавателя и различных учебников по LaTeX'у я научился рисовать график и с помощью специального окружения *begin{figure}* и *end{figure}* добавлять этот график в основной документ. Таким образом, учебная практика помогла освоить и этот этап в программировании, в работе с различными текстовыми файлами/документами.

Исходя из всего вышесказанного, хочется сказать, что курс по дисциплине LaTeX оказался очень полезен как для математиков, так и для программистов. Да и в целом, я думаю всем студентам нужно знать хотя бы базовые навыки работы в LaTeX.

А сейчас вы увидите формулировку заданий, которые нужно было выполнять самостоятельно, а затем и результат их выполнения.

1.1 Задание 2

Подготовить документ, содержащий математический текст, предоставленный инструктором. Внимание! Разделы, если они есть, и нумерация формул должны быть оформлены автоматически.

1.2 Задание 3

С помощью интерпретатора команд gnuplot построить изображение кривой в декартовых координатах и разместить его в документе, подготовленном во время выполнения задания 2.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

не принадлежащие этому пересечению. Возможны два случая: либо в любой окрестности точки x имеются точки, не принадлежащие множеству X , тогда $x \in \partial X$, либо существует окрестность U_0 точки x , все точки которой принадлежат множеству X . Тогда для любой окрестности U точки x в ее окрестности $U \cap U_0$, как и во всякой окрестности этой точки, имеются точки, принадлежащие пересечению $X \cap Y$, а следовательно, и множеству Y , и точки, не принадлежащие $X \cap Y$, а поэтому не принадлежащие и множеству Y (ибо в U_0 все точки принадлежат множеству X). Таким образом, в окрестности $U \cap U_0$ имеются как точки, принадлежащие множеству Y , так и не принадлежащие ему. Это означает, что $x \in \partial Y$. Итак, если $x \in \partial(X \cap Y)$, то

$$x \in \partial X \cup \partial Y$$

3. Докажем включение (9). Если $x \in \partial(X \setminus Y)$, то в любой окрестности точки x содержатся как точки, принадлежащие разности $X \setminus Y$, так и не принадлежащие ей. Возможны два случая. Первый: В любой окрестности точки x содержатся точки, не принадлежащие множеству X , тогда в любой окрестности точки x имеются как точки, принадлежащие множеству X (так как имеются точки из $X \setminus Y$), так и не принадлежащие X . Поэтому в этом случае $x \in \partial X$. Второй случай: у точки x существует окрестность U_0 , все точки которой принадлежат множеству X . Тогда для любой окрестности U точки x в окрестности $U \cap U_0$ этой точки имеются как точки, принадлежащие разности $X \setminus Y$, а следовательно, не принадлежащие множеству Y , так и точки, не принадлежащие рассматриваемой разности, а поэтому принадлежащие множеству Y (ибо все точки из окрестности U_0 принадлежат X). Поскольку $U \cap U_0 \subset U$, то и в окрестности U содержатся как точки, принадлежащие множеству Y , так и не принадлежащие ему. Это означает, что $x \in \partial Y$. Таким образом, если $x \in \partial(X \setminus Y)$, то

$$x \in \partial X \cup \partial Y$$

Лемма 1 (полуаддитивность верхней меры) Для любой конечной совокупности множеств $X_1, X_2, \dots, X_m$ имеет место неравенство

$$\mu^* \bigcup_{i=1}^m X_i \leq \sum_{i=1}^m \mu^* X_i \quad (1)$$

Следствие. Объединение конечного числа множеств мерь нуль также имеет меру нуль.

▷ Каковы бы ни были множества $X_1, X_2, \dots, X_m$, для любого ранга $k = 0, 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$S_k \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right) = \bigcup_{i=1}^m S_k (X_i)$$

ибо, если куб Q пересекается с множеством $\bigcup_{i=1}^m X_i$, то он пересекается хотя бы с одним множеством X_i , и наоборот. Поэтому

$$\begin{aligned} \mu S_k \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right) &= \mu \bigcup_{i=1}^m S_k (X_i) \leq \sum_{i=1}^m \mu S_k (X_i) k_\tau, \\ \mu S_k \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right) &= \mu \bigcup_{i=1}^m S_k (X_i) \leq \sum_{i=1}^m \mu S_k (X_i). \end{aligned} \quad (2)$$

(Строгое неравенство получится в том случае, когда один и тот же куб Q ранга k будет входить в разные множества $S_k(X)$. Это заведомо будет иметь место, если среди множеств X_i , имеются пересекающиеся.) Заметив, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu S_k \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right) = \mu^* \bigcup_{i=1}^m X_i,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu S_k (X_i) = \mu^* X_i,$$

и перейдя в неравенстве (2) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим неравенство (1). $\triangleleft$

Докажем следствие. Если $\mu X_i = 0$, а следовательно, и $\mu^* X_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, то в силу неравенства (1) имеем

$$\mu^* \bigcup_{i=1}^m X_i \leq \sum_{i=1}^m \mu^* X_i = 0.$$

Поэтому $\mu^* \bigcup_{i=1}^m X_i = 0$, откуда, согласно замечанию 1 вытекает, что множество $\bigcup_{i=1}^m X_i$ измеримо и его мера равна нулю.

Свойства меры.

Свойство 1 (неотрицательность меры). Для любого измеримого множества $X \subset R^n$ всегда

$$\mu X \geq 0.$$

Это сразу следует из (11) и (12).

Свойство 2 (монотонность меры). Если X_1 и X_2 — измеримые множества и $X_1 \subset X_2$, то

$$\mu X_1 \leq \mu X_2$$

Это сразу следует из леммы 1 и определения (12) меры измеримого множества.

Свойство 3. Объединение и пересечение конечного числа измеримых множеств, а также разность двух измеримых множеств являются измеримыми множествами.

▷ В самом деле, если множества $X_1, X_2, \dots, X_m$ измеримы, то они ограничены, а поэтому ограничены их объединение и пересечение; кроме того, их границы ∂X_i имеют меру нуль (теорема 1), следовательно, и объединение $\bigcup_{i=1}^m \partial X_i$ их границ имеет меру нуль (следствие леммы 4). Граница же $\partial \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right)$ и $\partial \left(\bigcap_{i=1}^m X_i \right)$ объединения и пересечения множеств $X_i, i = 1, 2, \dots, m$, содержатся в множестве $\bigcup_{i=1}^m \partial X_i$ (лемма 3) и потому также имеют меру нуль (следствие леммы 1). Поэтому сами эти множества $\bigcup_{i=1}^m X_i$ и $\bigcap_{i=1}^m X_i$ являются измеримыми множествами (теорема 1). Аналогично доказывается измеримость разности измеримых множеств. $\triangleleft$ Из свойства 3 меры и леммы 4, очевидно, следует, что для любых измеримых множеств $X_i, i = 1, 2, \dots, m$, справедливо неравенство

$$\mu \bigcup_{i=1}^m X_i \leq \sum_{i=1}^m \mu X_i \quad (3)$$

Свойство 4 (конечная аддитивность меры). Мера объединения конечного числа попарно непересекающихся измеримых множеств равна сумме мер этих множеств.

▷ Пусть X_i — измеримые множества ($i = 1, 2, \dots, m$) и

$$X_i \cap X_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Докажем, что

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right) = \sum_{i=1}^m \mu X_i \quad (5)$$

Мы уже имеем неравенство (3), даже без предположения о выполнении условия (4). Докажем противоположное неравенство. Если куб ранга k содержится в некотором множестве X , а следовательно, в $s_k(X_i)$, то он содержится и в объединении $\bigcup_{i=1}^m X_i$, а следовательно, в $s_k \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right)$, поэтому

$$\bigcup_{i=1}^m s_k(X_i) \subset s_k \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right) \quad (6)$$

откуда

$$\mu \bigcup_{i=1}^m s_k(X_i) \underset{(11)}{\leqslant} \mu s_k \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right). \quad (7)$$

Поскольку множества X_i не пересекаются, то не пересекаются и множества $s_k(X_i) \subset X_i$. В силу этого имеет место равенство

$$\mu \bigcup_{i=1}^m s_k(X_i) \underset{(11)}{=} \sum_{i=1}^m \mu s_k(X_i). \quad (8)$$

2.2 Задание 3

А вот и график, сделанный при помощи интерпретатора Gnuplot:

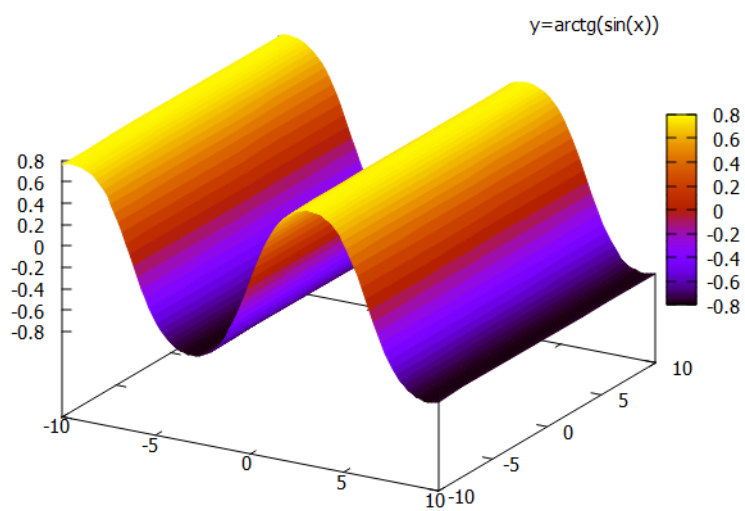


Рис. 1: Название изображения