

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчёт по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:

Пилипенко В. А., группа №22101

подпись

Руководитель практики:

к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	5

1 Описание работы

Со второго семестра в рамках образовательной программы началось знакомство с системой вёрстки L^AT_EX, базирующейся на разметочном языке. Эта система широко используется при подготовке научных и инженерных текстов.

Чтобы создать PDF-документ, нужно подготовить файл с расширением `.tex`. В его начале (так называемой преамбуле) указывается класс документа, подключаются необходимые пакеты, задаётся кодировка, а также можно определить собственные команды и окружения.

В L^AT_EX предусмотрены специальные команды, позволяющие структурировать текст:

- `\section{}` — для создания разделов;
- `\subsection{}` — для подразделов;
- `\subsubsection{}` — для более мелкой структуры.

Для изменения внешнего вида текста можно использовать следующие команды:

- `\textbf{}` — делает текст жирным;
- `\textit{}` — выделяет курсивом.

Формулы оформляются с помощью специальных окружений. Например:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (1)$$

Для визуализации графиков можно воспользоваться программой Gnuplot. После ввода функции в терминале создаётся график, который затем можно вставить в документ.

Готовый документ можно собрать с помощью следующих команд:

- `latex namefile.tex`
- `dvips -Ppdf -G0 namefile.dvi`
- `ps2pdf namefile.ps`

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Поскольку функция $y = f(x)$ непрерывна при $x = x_0$, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ и, следовательно, в силу теоремы о пределе сложной функции (см. (6.41) в п. 6.13) имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0. \quad (2)$$

Поделив обе части первого равенства (10.30) на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (3)$$

В силу равенства (14) и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ предел правой части равенства (15) при $\Delta x \rightarrow 0$ существует и равен $g'(y_0)f'(x_0)$, следовательно, существует и предел левой части, т.е. существует

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

причем

$$F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0). \quad \triangleleft$$

(инвариантность формы дифференциала).

$$dz = F'(x_0)dx = g'(y_0)dy, \quad (4)$$

или, короче,

$$dz = z'_x dx = z'_y dy.$$

Эта формула показывает, что формально записи дифференциала сложной функции посредством независимой переменной x и посредством зависимой переменной y имеют один и тот же вид, но следует иметь в виду, что здесь $dx = \Delta x$ — приращение независимой переменной x , а dy — дифференциал функции $y = f(x)$, т.е. главная линейная часть приращения Δy зависимой переменной ("главная" в том смысле, что разность $\Delta y - dy$ является при $\Delta x \rightarrow 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем само Δx).

Докажем формулу (16):

$$dz = dF(x_0) = F'(x_0)dx = g'(y_0)f'(x_0)dx = g'(y_0)dy.$$

◁ Вычислим производную функции $y = x^\alpha, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, с помощью формулы (10.28). Для этого представим функцию $y = x^\alpha$ как композицию функций $y = e^u$ и $u = \alpha \ln x$. Заметив, что $\frac{dy}{du} = e^u, \frac{du}{dx} = \frac{\alpha}{x}$,

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = (e^u)' \cdot (\alpha \ln x)' = e^u \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

т.е.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \quad (5)$$

10.8. Гиперболические функции и их производные.

Нередко в математическом анализе встречаются функции

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Они имеют специальные названия: первая из них называется *гиперболический синус* и обозначается $\operatorname{sh} x$, а вторая — *гиперболический косинус* $\operatorname{ch} x$. Таким образом,

$$\operatorname{sh} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (6)$$

$$\operatorname{ch} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (7)$$

Эти функции обладают некоторыми свойствами, похожими на свойства обычных (круговых) синусов и косинусов, например,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1, \quad (8)$$

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x. \quad (9)$$

Слово “гиперболический” в названиях функций (6) и (7) объясняется тем, что уравнения

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad a > 0, \quad -\infty < t < +\infty,$$

являются, в силу формулы (8), параметрическими уравнениями правой ветви гиперболы $y^2 = x^2 - a^2$, подобно тому, как уравнения

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

являются параметрическими уравнениями окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

Вычислим производные гиперболических синуса, косинуса:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad (10)$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x. \quad (11)$$

10.9. Производные комплекснозначных функций действительного аргумента.

Если функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности U точки x_0 числовой оси и принимает, вообще говоря, комплексные значения, т.е. имеет вид

$$f(x) = u(x) + iv(x), \quad x \in R, \quad x_0 \in R, \quad x \in U,$$

то ее производная в точке x_0 определяется равенством

$$f'(x_0) = u'(x_0) + iv'(x_0) \quad (12)$$

(само собой разумеется, что это определение имеет смысл только тогда, когда у функций $u(x)$ и $v(x)$ существуют производные в точке x_0).

При таком определении операция дифференцирования остаётся линейной:

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2', \quad \lambda_1 \in \mathbb{C}, \quad \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Если $f(x) = \cos \alpha x + i \sin \alpha x$, то

$$f'(x) = -\alpha \sin \alpha x + i \alpha \cos \alpha x = i \alpha (\cos \alpha x + i \sin \alpha x) = i \alpha f(x). \quad (13)$$

Можно обобщить понятие производной на случай комплекснозначных функций комплексного переменного. Это понятие приводит к большому качественному многообразию новых явлений и потому изучается в отдельном курсе теории функций комплексного переменного.

§11. Производные и дифференциалы высших порядков

11.1. Производные высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y' = f'(x)$ во всех точках некоторой окрестности точки x_0 . Если функция $f'(x)$ в свою очередь имеет в точке x_0 производную $[f'(x)]'|_{x=x_0}$, то она называется *второй производной функции f* в точке x_0 и обозначается $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$. Таким образом, опуская обозначения аргумента, имеем:

$$y^{(2)} = y'' \stackrel{\text{def}}{=} (y')'.$$

Аналогично определяются и производные $y^{(n)}$ более высоких порядков n :

$$y^{(n+1)} = [y^{(n)}]', \quad n = 0, 1, \dots \quad (14)$$

где для удобства считается, что $y^{(0)} = y$.

Если $y = a^x$, $a > 0$, то $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x (\ln a)^2$, вообще, $y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$, $n=0,1,2,\dots$. В частности, если $y = e^x$, то

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \quad (15)$$

Если $y = \sin x$, $y' = \cos x$, $y^{(2)} = -\sin x$, $y^{(3)} = -\cos x$, $y^{(4)} = \sin x$. Заметив, что $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$, получим

$$y' = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad y^{(2)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right).$$

Вообще,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \quad (16)$$

Аналогично,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (17)$$

2.2 Задание 3

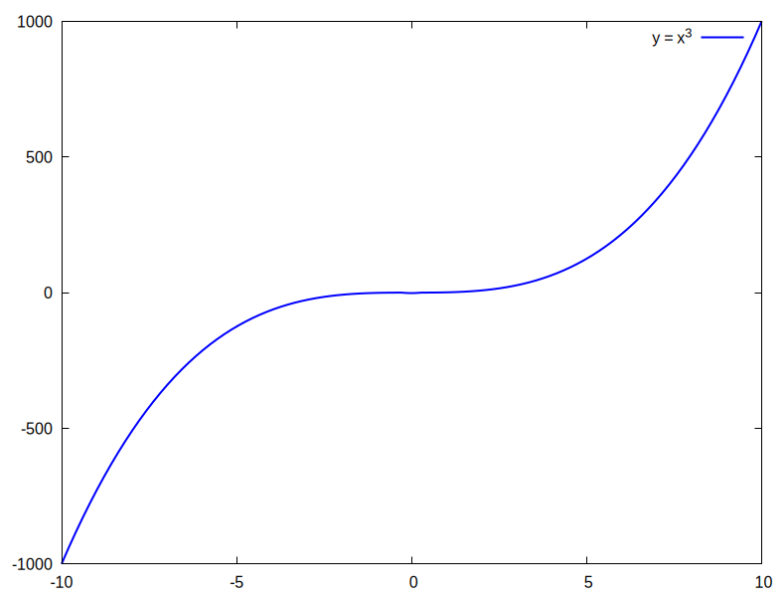


Рис. 1: График функции $y = x^3$