

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике  
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:  
Лорви А.Т. группа 22101

---

*подпись*

Руководитель практики:  
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

---

*подпись*

Готовая оценка:

---

*оценка*

# Содержание

|          |                          |          |
|----------|--------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Описание работы</b>   | <b>3</b> |
| 1.1      | Задание 2 . . . . .      | 3        |
| 1.2      | Задание 3 . . . . .      | 3        |
| <b>2</b> | <b>Результаты работы</b> | <b>3</b> |
| 2.1      | Задание 2 . . . . .      | 3        |
| 2.2      | Задание 3 . . . . .      | 6        |

# 1 Описание работы

В задании 2 нужно было страницы из Тома 1 (307-309) написать в LaTeX, изучить синтаксис математических формул, о рубрикации текста и специальных абзацев, об оформлении новых окружений (теоремы, леммы и пр.)

В задании 3 нужно было создать график с помощью gnuplot и вставить его в файл задания 2

## 1.1 Задание 2

Подготовить документ, содержащий математический текст, предоставленный инструктором. (страницы берутся из Том 1, Том 2)

Скринкаст о наборе математических формул.

Скринкаст о рубрикации текста и специальных абзацах.

Скринкаст об оформлении новых окружений (теоремы, леммы и пр.) и команд.

Внимание! Разделы, если они есть, и нумерация формул должны быть оформлены автоматически.

## 1.2 Задание 3

С помощью интерпретатора команд gnuplot построить изображение кривой в декартовых координатах и разместить его в документе, подготовленном во время выполнения задания 2.

Скринкасты о работе с gnuplot: Первый, Второй .

Плавающие объекты Скринкаст

# 2 Результаты работы

## 2.1 Задание 2

Я написал в LaTeX страницы из Тома 1 (307-309), изучил синтаксис математических формул, о рубрикации текста и специальных абзацев, об оформлении новых окружений (теоремы, леммы и пр.). Ниже приведен результат работы

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  сходится, а интеграл  $\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{x}$  расходится.

Пример 1. Посредством замены переменной  $x = 1/t$  вычислим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

2. Вычислим интеграл  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, n = 0, 1, 2, \dots$  Проинтег-

рировав по частям при  $n > 0$ , будем иметь

$$I_n = - \int_0^{+\infty} x^n de^{-x} = - x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1} \quad (1)$$

Поскольку  $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$ , то, применив последовательно рекуррентную формулу (1), получим

$$I_n = n I_{n-1} = n(n-1) I_{n-2} = \dots = n! I_0 = n!$$

**29.3. Несобственные интегралы от неотрицательных функций.** Установим признаки сходимости для несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Лемма 1. Если функция  $f$  неотрицательна на полуинтервале  $[a, b)$ , то для сходимости интеграла  $\int_a^b f(x)dx$  необходимо и достаточно, чтобы множество всех интегралов  $\int_a^\eta f(x)dx, n \in [a, b)$ , было ограничено сверху, т. е. чтобы существовала такая постоянная  $c > 0$ , что для всех  $n \in [a, b)$  выполнялось бы неравенство

$$\int_a^\eta f(x)dx \leq c \quad (2)$$

▷ Положим

$$\varphi(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^\eta f(x)dx \quad (3)$$

Если  $a \leq \eta < \eta' < b$ , то

$$\varphi(\eta') = \int_a^{\eta'} f(x)dx = \int_a^\eta f(x)dx + \int_\eta^{\eta'} f(x)dx \geq \int_a^\eta f(x)dx = \varphi(\eta)$$

ибо в силу неотрицательности функции  $f$  имеет место неравенство  $\int_\eta^{\eta'} f(x)dx \geq 0$ , т. е. функция  $\varphi(\eta)$  возрастает на полуинтервале  $[a, b)$ . Существование несобственного интеграла  $\int_a^b f(x)dx$  означает существование конечного предела

$$\lim_{\eta \rightarrow b} \varphi(\eta) = \int_a^b f(x)dx$$

что имеет место тогда и только тогда, когда функция  $\varphi(\eta)$  ограничена сверху (см. теорему 4 в п. 6.11), а это в силу (3) равносильно условию (2).

Замечание. При доказательстве леммы 1 было показано, что в случае неотрицательности функции  $f$  функция  $\varphi(\eta)$  (см. (3)) возрастает на  $[a, b)$  и, следовательно, всегда имеет при  $\eta \rightarrow b$  конечный или бесконечный, равный  $+\infty$ , предел в зависимости от того, ограничена она или нет. Если функция  $\varphi(\eta)$  неограничена на  $[a, b)$ , то

$$\lim_{\eta \rightarrow b} \int_a^\eta f(x)dx \stackrel{(29.15)}{=} \lim_{\eta \rightarrow b} \varphi(\eta) = +\infty$$

и в этом случае пишут

$$\int_a^b f(x)dx = +\infty$$

(как мы уже и поступали в примерах п. 29.1).  
(признак сравнения). Пусть

$$0 \leq g(x) \leq f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (4)$$

Тогда:

1. если интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  сходится, то сходится и интеграл
2. если интеграл  $\int_a^b g(x)dx$  расходится, то расходится и интеграл  $\int_a^b f(x)dx$

Следствие 1. Пусть функции  $f$  и  $g$  неотрицательны на промежутке  $[a, b]$ ,  $g(x) \neq 0$  при всех  $x \in [a, b]$  и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad (5)$$

интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  сходится

2. если интеграл  $\int_a^b g(x)dx$  расходится  $0 < k \leq +\infty$ , то и интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  расходится.

Следствие 2. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  эквивалентны при  $x \rightarrow b$ , т. е.  $f(x) = \varphi(x)g(x)$ ,  $a \leq x < b$ ,  $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = 1$ , то интегралы  $\int_a^b f(x)dx$  и  $\int_a^b g(x)dx$  одновременно сходятся или расходятся.

▷ Докажем теорему. Для любого  $\eta \in [a, b]$  в силу неравенства (4) имеем

$$\int_a^\eta g(x)dx \leq \int_a^\eta f(x)dx$$

Поэтому если интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  сходится и, следовательно, согласно лемме 1 ограничен сверху интеграл  $\int_a^\eta f(x)dx$ , то будет ограничен сверху и интеграл  $\int_a^\eta g(x)dx$ , откуда, согласно той же лемме, интеграл  $\int_a^b g(x)dx$  сходится.

Если же расходится интеграл  $\int_a^b g(x)dx$ , то в силу уже доказанного интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  не может сходиться, так как тогда бы сходился и интеграл  $\int_a^b g(x)dx$ , а это противоречит условию. Таким образом, интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  расходится. ◁

Докажем теперь следствие 1.

▷ Пусть выполняется условие ((5)) и  $0 \leq k < +\infty$ . Из того, что  $k$  является пределом функции  $\frac{f(x)}{g(x)}$  при  $x \rightarrow b$ , и из неравенства  $k < k + 1$  следует существование такого  $\eta \in [a, b]$ , что если  $\eta < x < b$ , то  $\frac{f(x)}{g(x)} < k + 1$ , т. е.

## 2.2 Задание 3

Я создал график  $\sin(3 \cdot x) + 1/x$  в gnuplot и вставил его в документ. Ниже представлена график, который вставил в документ.

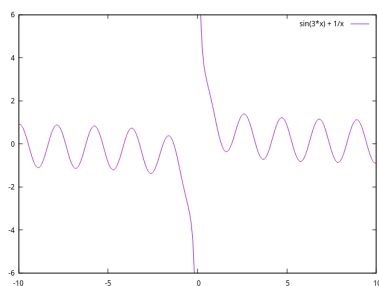


Рис. 1:  $\sin(3 \cdot x) + 1/x$