

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике  
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:  
Шувалов Е. Ю. группа 22101

---

*подпись*

Руководитель практики:  
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

---

*подпись*

Итоговая оценка:

---

*оценка*

# Содержание

|          |                          |          |
|----------|--------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Описание работы</b>   | <b>3</b> |
| 1.1      | Задание 2 . . . . .      | 3        |
| 1.2      | Задание 3 . . . . .      | 3        |
| <b>2</b> | <b>Результаты работы</b> | <b>4</b> |
| 2.1      | Задание 2 . . . . .      | 4        |
| 2.2      | Задание 3 . . . . .      | 7        |

# 1 Описание работы

Курс по изучению LaTeX позволил мне освоить новый навык, который пригодится мне в будущем. Благодаря преподавателю, Ольге Богоявленской, передо мной больше не будет стоять вопрос о том, как оформить математические формулы в моих документах.

В первой лабораторной работе необходимо было переписать 3 страницы из учебников, связанных с математикой. Звучит просто, но это было не так. Я потратил достаточно много времени на изучение синтаксиса LaTeX, но это того стоило. Таким образом, я научился использовать различные команды для создания сложных математических формул и простых лаконичных текстов, научился правильно оформлять содержимое документа, включая выравнивание, шрифты, отступы и другие элементы.

Вторая лабораторная работа оказалась куда легче. Но тем не менее я освоил азы Gnuplot, что позволило мне рисовать графики разных функций и добавлять их в файлы LaTeX. Работа с рисунками и графиками вообще достаточно просто реализуется в LaTeX, что делает его использование эффективным.

В целом, изучение LaTeX может помочь каждому студенту, в особенности обучающимся в ИМИТ, стать более эффективным при создании курсовых и дипломных работ, а также подготовить их к профессиональной карьере.

## 1.1 Описание задания 2

Подготовить документ, содержащий математический текст, предоставленный инструктором. Внимание! Разделы, если они есть, и нумерация формул должны быть оформлены автоматически.

## 1.2 Описание задания 3

С помощью интерпретатора команд gnuplot построить изображение кривой в декартовых координатах и разместить его в документе, подготовленном во время выполнения задания 2.

## 2 Результаты работы

### 2.1 Задание 2

Полагая  $f^{(n+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (f^{(n)})'$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , как и для обобщенных функций из пространства  $D'$ , получим

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}), \quad f \in S', \quad \varphi \in S, \quad n = 1, 2, \dots$$

**О п р е д е л е н и е 7.** Для обобщенной функции  $f \in S'$  ее *преобразованием Фурье*  $Ff$  и *обратным преобразованием Фурье*  $F^{-1}f$  называются функционалы на  $S$ , определяемые соответственно формулами

$$(Ff, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (f, F\varphi), \quad \varphi \in S, \quad (1)$$

$$(F^{-1}f, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (f, F^{-1}\varphi), \quad \varphi \in S. \quad (2)$$

Эти определения имеют смысл, так как если  $\varphi \in S$ , то согласно теореме 2  $F\varphi \in S$  и  $F^{-1}\varphi \in S$ .

Можно показать, что соотношения (1) и (2) выполняются, когда  $f$  является обычной абсолютно интегрируемой на числовой оси  $R$  функцией: они означают просто перемену порядка интегрирования. Например, формула (1) с точностью до констант имеет в этом случае вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx.$$

В силу примера 2 преобразование Фурье оказывается теперь определенным для более широкого класса и обычных функций, чем это было раньше, в частности, преобразование Фурье определено для многочленов и вообще для всех функций медленного роста на бесконечности.

**П р и м е р 3.** Найдем преобразование Фурье единицы, т. е. функции  $f(x) = 1, x \in R$ , рассматриваемой как обобщенная функция (она является, очевидно, функцией медленного роста:  $1 \in S'$ ).

Имеем

$$\begin{aligned} (F1, \varphi) &\stackrel{(1)}{=} (1, F\varphi) \stackrel{(13)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx = \\ &= \sqrt{2\pi} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-iy(x-t)} dx \right]_{t=0} \stackrel{(16)}{=} \\ &\stackrel{(16)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi} [\varphi(t)]_{t=0} = \sqrt{2\pi} \varphi(0) = \sqrt{2\pi} (\delta, \varphi), \quad \varphi \in S \end{aligned}$$

(мы воспользовались здесь соотношением (1), т. е., что то же самое, соотношением  $F^{-1}(F\varphi) = \varphi$ ). Таким образом,

$$F \cdot 1 = \sqrt{2\pi} \delta.$$

**П р и м е р 4.** Найдем  $F\delta$  :

$$(F\delta, \varphi) = (\delta, F\varphi) = (F\varphi)(0) = \left. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx \right|_{y=0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \stackrel{(20)}{=} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi \right), \quad \varphi \in S.$$

Отсюда следует, что  $F\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ .

**Т е о р е м а 3.** Преобразование Фурье  $F$  отображает пространство  $S'$  линейно, непрерывно и взаимно однозначно на себя.

Эта теорема является прямым следствием теоремы 2 об отображении пространства  $S$  с помощью прямого и обратного преобразований Фурье линейно, непрерывно и взаимно однозначно на себя, так как доказательство соответствующих свойств преобразования Фурье обобщенных функций сводится с помощью формул (1) и (2) к аналогичным свойствам преобразования Фурье основных функций. Убедимся в этом.

▷ Прежде всего, если  $f \in S'$ , то  $Ff$  является линейным функционалом на  $S$ : если  $\varphi_1 \in S, \varphi_2 \in S, \lambda_1 \in C, \lambda_2 \in C$ , то

$$\begin{aligned} (Ff, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) &\stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} (f, F(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)) \stackrel{(24)}{=} (f, \lambda_1 F\varphi_1 + \lambda_2 F\varphi_2) \stackrel{(8)}{=} \\ &\stackrel{(8)}{=} \lambda_1 (f, F\varphi_1) + \lambda_2 (f, F\varphi_2) \stackrel{(31)}{=} \lambda_1 (Ff, \varphi_1) + \lambda_2 (Ff, \varphi_2). \end{aligned}$$

Далее,  $Ff$  является непрерывным функционалом: если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$  в  $S$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ff, \varphi_n) \stackrel{(1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (f, F\varphi_n) \stackrel{(5)}{=} (f, F\varphi) \stackrel{(1)}{=} (Ff, \varphi).$$

Таким образом, преобразование Фурье обобщенной функции из пространства  $S'$  является снова обобщенной функцией из этого пространства:

$$F(S') \subset S' \tag{3}$$

Аналогично доказывается, что

$$F^{-1}(S') \subset S' \tag{4}$$

Покажем теперь, что для любой функции  $f \in S'$  имеют место равенства

$$F^{-1}(Ff) = F(F^{-1}f) = f \tag{5}$$

В самом деле, например,

$$(F^{-1}(Ff), \varphi) \stackrel{(2)}{=} (Ff, F^{-1}\varphi) \stackrel{(17)}{=} (f, F(F^{-1}\varphi)) \stackrel{(34)}{=} (f, \varphi), \varphi \in S.$$

Из соотношений (5) сразу следует взаимно однозначность (инъективность) отображений  $F$  и  $F^{-1}$ . Например, если  $f_1 \in S', f_2 \in S'$  и  $Ff_1 = Ff_2$ , то, применив к обеим частям этого равенства преобразование  $F^{-1}$ , в силу (5) получим  $f_1 = f_2$ .

Из соотношений (5) следует также, что преобразование Фурье  $F$  отображает пространство  $S'$  не только в  $S'$ , но и на  $S'$  (т. е.  $F$  - биекция). Действительно, если  $\psi \in S'$ , то для элемента  $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}\psi$  будем иметь  $F\varphi = F(F^{-1}\psi) \stackrel{(55.42)}{=} \psi$ , т. е. в любой элемент  $\psi$  пространства  $S'$  при отображении  $F$  отображается некоторый элемент  $\varphi$  из  $S'$ .

Наконец, покажем, что отображение  $F$  непрерывно на  $S'$ : если

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ в } S' \text{ (см. (17)), то} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (Ff_n, \varphi) \stackrel{(1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, F\varphi) \stackrel{(28)}{=} (f_1 F\varphi) \stackrel{(5)}{=} (Ff, \varphi), \quad \varphi \in S, \end{aligned} \tag{18}$$

т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} Ff_n = Ff$  в  $S'$ , а это и означает непрерывность преобразования Фурье на  $S'$ .  $\triangleleft$

Аналогично теореме 3 доказывается, что и обратное преобразование Фурье также отображает линейно, непрерывно и взаимно однозначно пространство обобщенных функций  $S'$  на себя.

## 2.2 Задание 3

