

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:

Козлов Н. П. группа 22101

подпись

Руководитель практики:

к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
1.1	Задание 2	3
1.2	Задание 3	3
2	Результаты работы	4
2.1	Задание 2	4
2.2	Задание 3	7

1 Описание работы

Вот и настало время последней работы в Latex. Хочу выразить благодарность Ольге Юрьевне, которая на протяжении всего курса помогала в освоении Latex(tex).

Первое задание заключалось в подготовке документа, который содержит в себе текст из учебника по курсу Математического анализа. Увидив это задание впервые, казалось, что его выполнение займет большое количество времени и сил. Но, посмотрев скринкасты и изучив литературу, предоставленную нам преподавателем, я понял, что это задание намного легче, чем кажется. Благодаря этой работе я научился. Я освоил оформление страниц, создание различных окружений.

Второе задание включало в себя изучение программы Gnuplot, с помощью которой нужно было создать график и добавить его в документ первого задания. Изучив документацию и посмотрев скринкасты, я с легкостью выполнил данное задание и открыл для себя отличную программу для построения графиков и диаграмм.

Подводя итог, можно сказать, что курс по дисциплине Latex оказался очень полезен для меня.

Чуть ниже можно увидеть точную формулировку заданий.

1.1 Задание 2

Подготовить документ, содержащий математический текст, предоставленный инструктором. (страницы берутся из Том 1, Том 2)

Скринкаст о наборе математических формул.

Скринкаст о рубрикации текста и специальных абзацах.

Скринкаст об оформлении новых окружений (теоремы, леммы и пр.) и команд.

Внимание! Разделы, если они есть, и нумерация формул должны быть оформлены автоматически.

1.2 Задание 3

С помощью интерпретатора команд gnuplot построить изображение кривой в декартовых координатах и разместить его в документе, подготовленном во время выполнения задания 2.

Скринкасты о работе с gnuplot: Первый, Второй .

Плавающие объекты Скринкаст

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Из соотношений (42) и (43) следует, что

$$\sum_{i=1}^m \mu_{s_k}(X_i) \leq \mu_{s_k} \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right). \quad (1)$$

Множества X_i и $\bigcup_{i=1}^m X_i$ измеримы, поэтому существуют конечные пределы

$$\begin{aligned} \mu_* X_1 = \mu_* X_2 = 0, \quad \mu_*(X_1 \cup X_2) = \mu_*[0, 1] = 1 \neq 0 = \mu_* X_1 + \mu_* X_2, \\ \mu^* X_1 = \mu^* X_2 = 1, \quad \mu^*(X_1 \cup X_2) = \mu^*[0, 1] = 1 \neq 2 = \mu^* X_1 + \mu^* X_2. \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{s_k}(X_i) = \mu X_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{s_k} \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right) = \mu \bigcup_{i=1}^m X_i. \quad (2)$$

Перейдя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в неравенстве (5), в силу равенств (6) получим, что

$$\sum_{i=1}^m \mu X_i \leq \mu \bigcup_{i=1}^m X_i.$$

Из неравенств (44) и (45) вытекает равенство (46), т. е. свойство 4.

Отметим, что как нижняя, так и верхняя меры множества не обладают свойствами аддитивности. Это видно уже в одномерном случае. Например, если X_1 — множество рациональных, а X_2 — иррациональных точек отрезка $[0, 1]$, то

$$\begin{aligned} \mu_* X_1 = \mu_* X_2 = 0, \quad \mu_*(X_1 \cup X_2) = \mu_*[0, 1] = 1 \neq 0 = \mu_* X_1 + \mu_* X_2, \\ \mu^* X_1 = \mu^* X_2 = 1, \quad \mu^*(X_1 \cup X_2) = \mu^*[0, 1] = 1 \neq 2 = \mu^* X_1 + \mu^* X_2. \end{aligned}$$

Замечание 1 Добавление к измеримому множеству множества меры нуль или вычитание его из измеримого множества не нарушает измеримости исходного множества (это следует из свойства 3 меры, поскольку множества меры нуль измеримы) и не меняет его меры (а это следует непосредственно из свойства 4 меры). В частности, если X — измеримое множество, то измеримы его замыкание $\bar{X}$ и множество X_{int} его внутренних точек, причем

$$\mu X_{\text{int}} = \mu X = \mu \bar{X} \quad (3)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} X &= X_{\text{int}} \cup (X \setminus X_{\text{int}}), \quad X \setminus X_{\text{int}} \subset \partial X, \\ \bar{X} &= X \cup (\bar{X} \setminus X), \quad \bar{X} \setminus X \subset \partial X. \end{aligned}$$

По теореме 1 имеем $\mu \partial X = 0$, поэтому

$$\mu(X \setminus X_{\text{int}}) = \mu(\bar{X} \setminus X) = 0$$

и, следовательно, имеет место равенство (7)

В частности, если $\mu X = 0$, то $\mu \bar{X} = 0$.

Замечание 2 Замыкание измеримого множества, как и замыкание всякого ограниченного множества, является компактом. Таким образом, замыкание измеримого множества есть измеримый компакт.

Свойство 1 Мера множества не меняется при параллельном переносе.

Прежде чем доказывать это утверждение, докажем еще одну лемму.

Лемма 1 Если

$X_k \subset X \subset Y_k$, X_k, Y_k — измеримые множества, $k = 1, 2, \dots, \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(Y_k \setminus X_k) = 0$$

то множество X также измеримо и

$$\mu X = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu X_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu Y_k$$

▷ Действительно, если положить $X'_k = (X_k)_{\text{int}}$, $Y'_k = \bar{Y}_{ik}$, то будем иметь

$$\mu X'_k = \mu(X_k)_{\text{int}} = \mu X_k, \quad \mu Y'_k = \mu \bar{Y}_{ik} = \mu Y_k$$

а Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(Y'_k \setminus X'_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu Y'_k - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu X'_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu Y_k - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu X_k = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(Y_k \setminus X_k) = 0 \end{aligned}$$

Из включений $X \subset \bar{X} \subset Y'_k$, $X'_k \subset X_{\text{int}}$ имеем $\partial X = \bar{X} \setminus X_{\text{int}} \subset Y'_k \setminus X'_k$. Поэтому имеет место неравенство $\mu^* \partial X \leq \mu(Y'_k \setminus X'_k)$, откуда при $k \rightarrow \infty$ получаем $\mu^* \partial X = 0$, а значит, и $\mu \partial X = 0$. Это согласно теореме 1 означает измеримость множества X . (Ограниченность множества X , которая требуется в условиях теоремы 1, следует из включения $X \subset Y_k$ и ограниченности множества Y_k , как всякого измеримого множества.)

Далее, $X \setminus X_k \subset Y_k \setminus X_k$, $Y_k \setminus X \subset Y_k \setminus X_k$, поэтому $\mu(X \setminus X_k) \leq \mu(Y_k \setminus X_k)$, $\mu(Y_k \setminus X) \leq \mu(Y_k \setminus X_k)$, где $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(Y_k \setminus X_k) = 0$, а следовательно, в силу аддитивности меры

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mu X - \mu X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu Y_k - \mu X) = 0$$

Докажем теперь свойство 5° меры.

▷ Пусть X — измеримое множество, $X \subset R^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $X + a = \{x + a : x \in X\}$. Если Q — n -мерный куб с ребрами длины h и параллельными осям координат, то множество $Q + a$ также является кубом того же вида и, следовательно, измеримым множеством, причем (см. замечание 4)

$$\mu(Q + a) = \mu Q = h^n.$$

Для каждого натурального k множества $X_k = s_k(X) + a$, $Y_k = S_k(X) + a$ измеримы, так как являются объединением конечного числа измеримых множеств вида $Q + a$, где Q — куб ранга k , и

$$\mu X_k = \mu s_k(X), \quad \mu Y_k = \mu S_k(X)$$

ибо меры множеств X_k и Y_k равна сумме мер (как в формуле (7)), составляющих их кубов. Поскольку

$$X_k \subset X + a \subset Y_k$$

И

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(Y_k \setminus X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu Y_k - \mu X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu S_k(X) - \mu s_k(X)) = 0,$$

то согласно лемме 2 множество $X + a$ измеримо и

$$\mu(X + a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu X_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu s_k(X) = \mu X$$

Замечание 3 Рассмотрим $(n + 1)$ -мерное пространство R^{n+1} как произведение n -мерного R^n и числовой оси R :

$$R^{n+1} = R^n \times R$$

Если $X \subset R^n, [a, b] \subset R$, то множество $X \times [a, b]$ точек $(x_1, \dots, x_n, y), (x_1, \dots, x_n) \in X, y \in [a, b]$, называется цилиндром с основанием X (см. п. 40.2) и образующей $[a, b]$.

Можно доказать, что если X - измеримое в смысле n -мерной меры множество, то цилиндр $X \times [a, b]$ измерим в смысле $(n + 1)$ мерной меры и

$$\mu_{n+1}(X \times [a, b]) = (b - a)\mu_n X \quad (4)$$

Упражнение 1 Доказать утверждения замечания 6 .

42.2. Множества меры нуль. Укажем два типа множеств, мера Жордана которых всегда равна нулю (на подобные множества нередко удается разбить границу рассматриваемых множеств и тем самым доказать их измеримость).

Теорема 1 График всякой непрерывной на компакте функции имеет меру Жордана, равную нулю.

▷ Пусть $X \subset R^n, X$ - компакт, $y = f(x)$ - непрерывная на X функция, $x \in X, y \in R$ и

$$Y_i = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_n) \in X, y = f(x)\}$$

2.2 Задание 3

Из соотношений (42) и (43) следует, что

$$\sum_{i=1}^m \mu_{s_k}(X_i) \leq \mu_{s_k} \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right). \quad (5)$$

Множества X_i и $\bigcup_{i=1}^m X_i$ измеримы, поэтому существуют конечные пределы

$$\begin{aligned} \mu_* X_1 = \mu_* X_2 = 0, \quad \mu_*(X_1 \cup X_2) = \mu_*[0, 1] = 1 \neq 0 = \mu_* X_1 + \mu_* X_2, \\ \mu^* X_1 = \mu^* X_2 = 1, \quad \mu^*(X_1 \cup X_2) = \mu^*[0, 1] = 1 \neq 2 = \mu^* X_1 + \mu^* X_2. \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{s_k}(X_i) = \mu X_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{s_k} \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right) = \mu \bigcup_{i=1}^m X_i. \quad (6)$$

Перейдя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в неравенстве (5), в силу равенств (6) получим, что

$$\sum_{i=1}^m \mu X_i \leq \mu \bigcup_{i=1}^m X_i.$$

Из неравенств (44) и (45) вытекает равенство (46), т. е. свойство 4.

Отметим, что как нижняя, так и верхняя меры множества не обладают свойствами аддитивности. Это видно уже в одномерном случае. Например, если X_1 — множество рациональных, а X_2 — иррациональных точек отрезка $[0, 1]$, то

$$\begin{aligned} \mu_* X_1 = \mu_* X_2 = 0, \quad \mu_*(X_1 \cup X_2) = \mu_*[0, 1] = 1 \neq 0 = \mu_* X_1 + \mu_* X_2, \\ \mu^* X_1 = \mu^* X_2 = 1, \quad \mu^*(X_1 \cup X_2) = \mu^*[0, 1] = 1 \neq 2 = \mu^* X_1 + \mu^* X_2. \end{aligned}$$

Замечание 4 Добавление к измеримому множеству множества меры нуль или вычитание его из измеримого множества не нарушает измеримости исходного множества (это следует из свойства 3 меры, поскольку множества меры нуль измеримы) и не меняет его меры (а это следует непосредственно из свойства 4 меры). В частности, если X — измеримое множество, то измеримы его замыкание $\bar{X}$ и множество X_{int} его внутренних точек, причем

$$\mu X_{\text{int}} = \mu X = \mu \bar{X} \quad (7)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} X &= X_{\text{int}} \cup (X \setminus X_{\text{int}}), \quad X \setminus X_{\text{int}} \subset \partial X, \\ \bar{X} &= X \cup (\bar{X} \setminus X), \quad \bar{X} \setminus X \subset \partial X. \end{aligned}$$

По теореме 1 имеем $\mu \partial X = 0$, поэтому

$$\mu(X \setminus X_{\text{int}}) = \mu(\bar{X} \setminus X) = 0$$

и, следовательно, имеет место равенство (7)

В частности, если $\mu X = 0$, то $\mu \bar{X} = 0$.

Замечание 5 Замыкание измеримого множества, как и замыкание всякого ограниченного множества, является компактом. Таким образом, замыкание измеримого множества есть измеримый компакт.

Свойство 2 Мера множества не меняется при параллельном переносе.

Прежде чем доказывать это утверждение, докажем еще одну лемму.

Лемма 2 *Если*

$X_k \subset X \subset Y_k$, X_k, Y_k — измеримые множества, $k = 1, 2, \dots, u$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(Y_k \setminus X_k) = 0$$

по множеству X также измеримо и

$$\mu X = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu X_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu Y_k$$

▷ Действительно, если положить $X'_k = (X_k)_{int}$, $Y'_k = \bar{Y}_{ik}$, то будем иметь

$$\mu X'_k = \mu(X_k)_{int} = \mu X_k, \quad \mu Y'_k = \mu \bar{Y}_{ik} = \mu Y_k$$

а Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(Y'_k \setminus X'_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu Y'_k - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu X'_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu Y_k - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu X_k = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(Y_k \setminus X_k) = 0 \end{aligned}$$

Из включений $X \subset \bar{X} \subset Y'_k$, $X'_k \subset X_{int}$ имеем $\partial X = \bar{X} \setminus X_{int} \subset Y'_k \setminus X'_k$. Поэтому имеет место неравенство $\mu^* \partial X \leq \mu(Y'_k \setminus X'_k)$, откуда при $k \rightarrow \infty$ получаем $\mu^* \partial X = 0$, а значит, и $\mu \partial X = 0$. Это согласно теореме 1 означает измеримость множества X . (Ограниченность множества X , которая требуется в условиях теоремы 1, следует из включения $X \subset Y_k$ и ограниченности множества Y_k , как всякого измеримого множества.)

Далее, $X \setminus X_k \subset Y_k \setminus X_k$, $Y_k \setminus X \subset Y_k \setminus X_k$, поэтому $\mu(X \setminus X_k) \leq \mu(Y_k \setminus X_k)$, $\mu(Y_k \setminus X) \leq \mu(Y_k \setminus X_k)$, где $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(Y_k \setminus X_k) = 0$, а следовательно, в силу аддитивности меры

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mu X - \mu X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu Y_k - \mu X) = 0$$

Докажем теперь свойство 5° меры.

▷ Пусть X — измеримое множество, $X \subset R^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $X + a = \{x + a : x \in X\}$. Если Q — n -мерный куб с ребрами длины h и параллельными осям координат, то множество $Q + a$ также является кубом того же вида и, следовательно, измеримым множеством, причем (см. замечание 4)

$$\mu(Q + a) = \mu Q = h^n.$$

Для каждого натурального k множества $X_k = s_k(X) + a$, $Y_k = S_k(X) + a$ измеримы, так как являются объединением конечного числа измеримых множеств вида $Q + a$, где Q — куб ранга k , и

$$\mu X_k = \mu s_k(X), \quad \mu Y_k = \mu S_k(X)$$

ибо меры множеств X_k и Y_k равна сумме мер (как в формуле (7)), составляющих их кубов. Поскольку

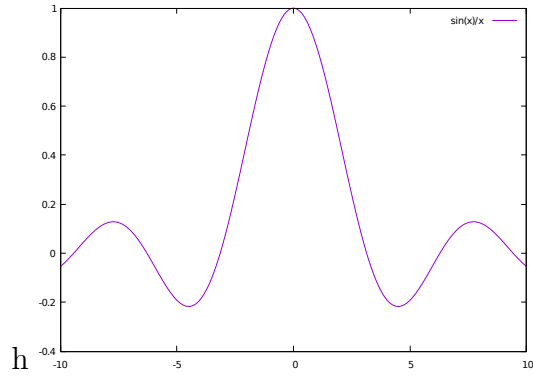
$$X_k \subset X + a \subset Y_k$$

И

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(Y_k \setminus X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu Y_k - \mu X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu S_k(X) - \mu s_k(X)) = 0,$$

то согласно лемме 2 множество $X + a$ измеримо и

$$\mu(X + a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu X_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu s_k(X) = \mu X$$



Замечание 6 Рассмотрим $(n+1)$ -мерное пространство R^{n+1} как произведение n -мерного R^n и числовой оси R :

$$R^{n+1} = R^n \times R$$

Если $X \subset R^n$, $[a, b] \subset R$, то множество $X \times [a, b]$ точек $(x_1, \dots, x_n, y)$, $(x_1, \dots, x_n) \in X$, $y \in [a, b]$, называется цилиндром с основанием X (см. п. 40.2) и образующей $[a, b]$.

Можно доказать, что если X - измеримое в смысле n -мерной меры множество, то цилиндр $X \times [a, b]$ измерим в смысле $(n+1)$ мерной меры и

$$\mu_{n+1}(X \times [a, b]) = (b - a)\mu_n X \quad (8)$$

Упражнение 2 Доказать утверждения замечания 6 .

42.2. Множества меры нуль. Укажем два типа множеств, мера Жордана которых всегда равна нулю (на подобные множества нередко удается разбить границу рассматриваемых множеств и тем самым доказать их измеримость).

Теорема 2 График всякой непрерывной на компакте функции имеет меру Жордана, равную нулю.

▷ Пусть $X \subset R^n$, X - компакт, $y = f(x)$ - непрерывная на X функция, $x \in X$, $y \in R$ и

$$Y_i = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_n) \in X, y = f(x)\}$$