

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Коновалов Август. Группа 22103

подпись

Руководитель практики:
Е. И. Рыбин

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	8

1 Описание работы

В курсе дисциплины "Компьютерные технологии в математике" ставилась цель ознакомиться с базовыми принципами работы экосистемы(языком вёрстки) Latex, то есть изучить способы ввода и трансляции математических текстов; а также с gnuplot - высокоуровневым языком команд и сценариев, предназначенным для построения графиков математических функций и работы с данными.

В ходе выполнения второго задания, я ознакомился с базовыми принципами написания математических формул, в числе которых были матрицы и матричные определители.

Выполняя третье задание, я изучил основы построения кривых линий, фигур и поверхностей в gnuplot.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Замечание. Если краем гладкой поверхности является контур, то он может быть негладким. Например, тождественное отображение квадрата $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0\}$ на себя является гладкой поверхностью с представлением $x=x, y=y, z=0$, т.е. $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 0)$, $\mathbf{r}_x = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r}_y = (0, 1, 0)$, и ясно, что функции r_x и r_y непрерывны и линейно независимы на квадрате Q , а краем этой поверхности является кусочно гладкая кривая, состоящая из сторон квадрата, касательные векторы к которым имеют разрывы в вершинах квадрата Q .

46.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

В силу неколлинеарности векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ в неособой точке в ней однозначно определена плоскость, параллельная этим векторам. Как было доказано выше, эта плоскость содержит касательные ко всем непрерывно дифференцируемым кривым на поверхности в рассматриваемой неособой точке поверхности. Это делает естественным следующее.

Определение 2. Плоскость, проходящая через неособую точку $M(u_0, v_0)$ поверхности S параллельно векторам $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ и $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ называется *касательной плоскостью к поверхности S в этой точке*.

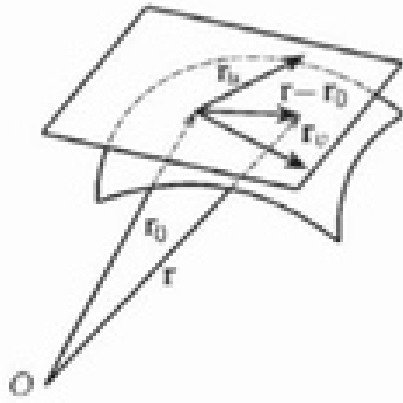


Рис. 172:

Ясно, что касательная плоскость определена однозначно.

Равенство (46.4) означает что касательная в точке $M(u_0, v_0)$ к любой непрерывно дифференцируемой кривой на поверхности лежит в касательной плоскости к поверхности S в этой точке.

Если $\mathbf{r}_u^0 = \mathbf{r}_u(u_0, v_0)$, $\mathbf{r}_v^0 = \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$, $\mathbf{r}_0$ - радиус-вектор точки $M_0 = M(u_0, v_0)$, а $\mathbf{r}$ - радиус-вектор произвольной точки касательной к плоскости к поверхности S в точке $\mathbf{r}_0$, то уравнение касательной плоскости, записанное в виде смешанного произведения, имеет вид (рис. 172)

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_u^0, \mathbf{r}_v^0) = 0. \quad (46.5)$$

Если

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\mathbf{r}_u^0 = (x_u^0, y_u^0, z_u^0), \quad \mathbf{r}_v^0 = (x_v^0, y_v^0, z_v^0),$$

то уравнение (46.5) в координатной записи имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix} = 0. \quad (46.6)$$

Если поверхность S является графиком функции, т.е. имеет представление вида $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$ и, следовательно, переменные x и y могут приняты за координаты на поверхности S , то

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \mathbf{r}_x = (1, 0, f_x), \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y). \quad (46.7)$$

Причем

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = 1 + f_x^2 + f_y^2 > 0.$$

Поэтому если функция f непрерывно дифференцируема на замыкании $\overline{G}$ области G , то поверхность $S = \{z = f(x, y); (x, y) \in \overline{G}\}$ гладкая. Уравнение (46.6) в этом случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x^0 \\ 0 & 1 & f_y^0 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. вид

$$z - z_0 = (x - x_0)f_x^0 + (y - y_0)f_y^0 \quad (46.8)$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$, $f_x^0 = f_x(x_0, y_0)$, $f_y^0 = f_y(x_0, y_0)$.

Для случая графика дифференцируемой функции двух переменных в п. 36.5 было дано другое определение касательной плоскости, основанное на локальном приближении дифференцируемой функции линейной функцией. Оно приводило к тому же уравнению (46.8). Это означает, что два определения касательной плоскости к графику дифференцируемой функции (данное в п. 36.5 и здесь) равносильны.

Ненулевой вектор, перпендикулярный касательной плоскости в точке $M(u_0, v_0)$ поверхности S называется *нормальным вектором* или *нормалью поверхности S в этой точке*, а прямая, проходящая через точку $M(u_0, v_0)$ в направлении нормали, — *нормальной прямой*.

Очевидно, что если $M(u_0, v_0)$ — неособая точка поверхности, то вектор $\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0$ является в этой точке нормалью, а вектор

$$\nu = \frac{\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0}{|\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0|} \quad (46.9)$$

— единичной нормалью.

Запишем векторное произведение $\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0$ в координатной форме:

$$\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}.$$

Здесь и в дальнейшем $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, как обычно, обозначают единичные векторы координатных осей (правой или левой) ортонормированной системы координат x, y, z . Так как

$$\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0 = \left(\begin{vmatrix} y_u^0 & z_u^0 \\ y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u^0 & y_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 \end{vmatrix} \right),$$

то уравнение нормальной имеет вид

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u^0 & z_u^0 \\ y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u^0 & x_u^0 \\ z_v^0 & x_v^0 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u^0 & y_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 \end{vmatrix}},$$

а в случае поверхности, заданной явным представлением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{G}$, - вид

$$\frac{x-x_0}{f_x^0} = \frac{y-y_0}{f_y^0} = -(z-z_0) \quad (46.10)$$

где $f_x^0 = f_x(x_0, y_0)$, $f_y^0 = f_y(x_0, y_0)$

Иногда поверхность задается в неявном виде с помощью уравнения

$$F(x, y, z) = 0 \quad (46.11)$$

в том смысле, что координаты (x, y, z) точек рассматриваемой поверхности удовлетворяют уравнению (46.11). Если функция F непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) , $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и одна из частных производных функции F в точке (x_0, y_0, z_0) не равна нулю, например $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то согласно теореме о неявных функциях в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) , уравнение (46.11) можно записать в виде

$$z = f(x, y) \quad (46.12)$$

т.е. локально множество точек (x, y, z) , удовлетворяющих уравнению (46.11), является параметрически заданной поверхностью с явным представлением. Вспомнив, что для частных производных функции (46.12) имеют место формулы

$$\frac{\delta f}{\delta x} = - \frac{\delta F}{\delta x} \div \frac{\delta F}{\delta z}, \quad \frac{\delta f}{\delta y} = - \frac{\delta F}{\delta y} \div \frac{\delta F}{\delta z},$$

из уравнения (46.8) получим, что уравнение касательной плоскости поверхности имеет вид

$$(x-x_0)F_x^0 + (y-y_0)F_y^0 + (z-z_0)F_z^0 = 0, \quad (46.13)$$

где $F_x^0 = F_x(x_0, y_0, z_0)$, $F_y^0 = F_y(x_0, y_0, z_0)$, $F_z^0 = F_z(x_0, y_0, z_0)$, а уравнение нормальной прямой - вид

$$\frac{x-x_0}{F_x^0} = \frac{y-y_0}{F_y^0} = \frac{z-z_0}{F_z^0}.$$

Строим график в pdf формате `set term pdfcairo` Выводим его в файл `image1.pdf` `set output 'image1.pdf'` Устанавливаем разметки по оси z `set ztics 50` `set cbtics 50` Строим поверхность `splot x + 2*y t 'Клеточки' w points`

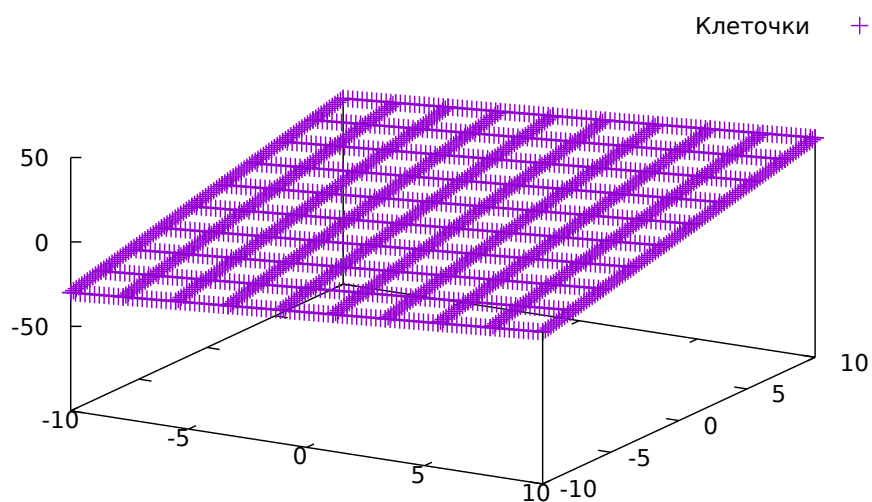


Рис. 173: Клеточки

2.2 Задание 3

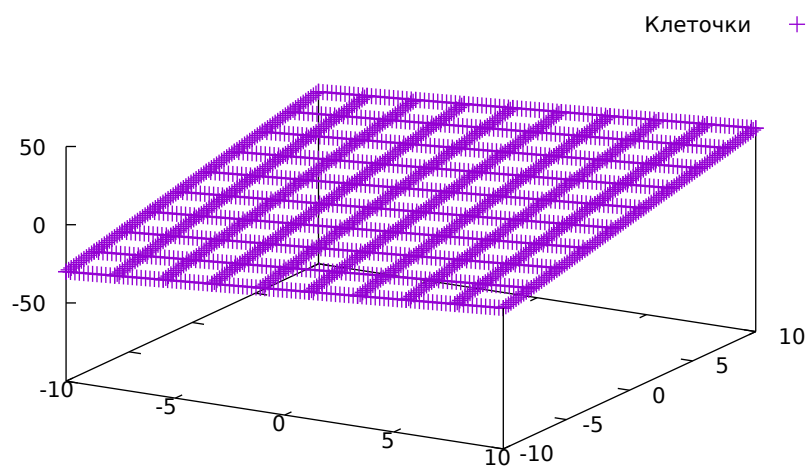


Рис. 1: ТРЕТЬЯ ЛАБОРАТОРНАЯ