

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике  
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:  
Киселева С. А. группа 22101

---

*подпись*

Руководитель практики:  
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

---

*подпись*

Итоговая оценка:

---

*оценка*

# Содержание

|          |                          |          |
|----------|--------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Описание работы</b>   | <b>3</b> |
| 1.1      | Задание 1 . . . . .      | 3        |
| 1.2      | Задание 2 . . . . .      | 3        |
| 1.3      | Задание 3 . . . . .      | 3        |
| <b>2</b> | <b>Результаты работы</b> | <b>4</b> |
| 2.1      | Задание 2 . . . . .      | 4        |
| 2.2      | Задание 3 . . . . .      | 6        |

# 1 Описание работы

В ходе дисциплины "Учебная практика: компьютерные технологии в математике" выполнялись задачи освоения инструментов набора и трансляции математических текстов с помощью издательской системы LaTeX, а также овладения инструментами построения научных графиков с помощью системы Gnuplot. Помимо прочего были освоены следующие навыки: набор, трансляция и структура документа LaTeX; набор математических формул, команды математических символов; построение графических объектов в документах LaTeX. Отчет о проделанной работе содержит результаты выполнения поставленных задач (Задание 1, Задание 2 и Задание 3)

## 1.1 Задание 1

Первое задание, предложенное в курсе, было направлено на знакомство с функционалом и работой с LaTeX. В нем мы должны были добавить оригинальный абзац текста, который содержал бы не менее одной группы и двух специальных символов. Затем транслировать исходный файл и получить документ в форматах dvi и postscript и pdf. Также к каждому заданию прилагаются скринкасты, что разъясняют и помогают в работе над индивидуальными заданиями.

## 1.2 Задание 2

В этом задании нужно было подготовить документ, содержащий математический текст, предоставленный инструктором (преподавателем) из Тома 1 или 2 по Математическому анализу. Всего давалось 3 страницы, которые нужно было представить в виде .tex файла и затем компилировать в .pdf. Также прилагались следующие скринкасты: о наборе математических формул, о рубрикации текста и специальных абзацах, об оформлении новых окружений (теоремы, леммы и пр.) и команд.

## 1.3 Задание 3

С помощью интерпретатора команд - gnuplot нужно было построить изображение кривой и разместить его в документе, подготовленном во время выполнения задания 2. Также следовало прослушать скринкасты о работе с gnuplot и о плавающих объектах в этом интерпретаторе.

## 2 Результаты работы

### 2.1 Задание 2

и, следовательно, функция  $f$  ограничена на отрезке  $[a, b]$ . Очевидно также, что в силу возрастания функции  $f$  для любого разбиения  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k_\tau}$  отрезка  $[a, b]$  имеют место равенства

$$\begin{aligned} m_k &= \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_{k-1}), \\ M_k &= \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_k). \end{aligned} \quad (1)$$

Поэтому, заметив, что

$$x_k - x_{k-1} = \Delta x_k \leq |\tau|, \quad k = 1, 2, \dots, k_\tau, \quad (2)$$

и что  $x_0 = a, x_{k_\tau} = b$ , получим

$$\begin{aligned} S_\tau - s_\tau &= \sum_{k=1}^{k_\tau} (M_k - m_k) \Delta x_k \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=1}^{k_\tau} [f(x_k) - f(x_{k-1})] \Delta x_k \stackrel{(2)}{\leq} \\ &\leq [(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \dots \\ &\quad \dots + (f(x_{k_\tau}) - f(x_{k_\tau-1}))] |\tau| = [f(b) - f(a)] |\tau|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$ , и потому, согласно теореме 2, функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ .  $\triangleleft$

**З а м е ч а н и е.** Отметим, что монотонные на отрезке функции могут быть и разрывными. Так, например, функция  $f(x) = \text{sign } x$  монотонна и разрывна на любом отрезке, содержащем точку  $x = 0$ . Поскольку же всякая монотонная функция, в частности,  $f(x) = \text{sign } x$ , согласно теореме 4, интегрируема, то отсюда следует, что существуют разрывные интегрируемые функции.

## §24. Свойства интегрируемых функций

**24.1. Основные свойства определенного интеграла.** Перечислим свойства определенного интеграла, вытекающие непосредственно из того, что он является пределом интегральных сумм.

$$1^\circ \int_a^b dx = b - a.$$

$\triangleright$  В данном случае подынтегральная функция тождественно равна 1, и потому при любом разбиении  $\tau = \{x_j\}_{j=0}^{j_\tau}$  все интегральные суммы Римана равны  $b - a$ :

$$\sigma_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} \Delta x_j = b - a$$

следовательно,

$$\int_a^b dx = \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sigma_\tau = b - a \triangleleft$$

**3° Л и н н е й н о с т ь и н т е г р а л а.** Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на отрезке  $[a, b]$ , то при любых  $\lambda \in \text{Rim} \in R$  функция  $\lambda f + \mu g$  также интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx \quad (3)$$

▷ Каковы бы ни были разбиение  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$  отрезка  $[a, b]$  и точки  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, k_\tau$ , будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_\tau(\lambda f + \mu g) &= \sum_{k=1}^{k_\tau} [\lambda f(\xi_k) + \mu g(\xi_k)] \Delta x_k = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k) \Delta x_k + \mu \sum_{k=1}^{k_\tau} g(\xi_k) \Delta x_k = \lambda \sigma_\tau(f) + \mu \sigma_\tau(g).\end{aligned}\quad (4)$$

Поскольку при  $|\tau| \rightarrow 0$  предел правой части этого равенства в силу интегрируемости функций  $f$  и  $g$  существует, то существует при этом условии и предел левой части  $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sigma_\tau(\lambda f + \mu g)$ , что означает интегрируемость функции  $\lambda f + \mu g$ . Перейдя в равенстве (4) к пределу при  $|\tau| \rightarrow 0$ , получим формулу (3). ◁

3° Если  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то она интегрируема и на любом отрезке  $[a^*, b^*] \subset [a, b]$ .

▷ Из интегрируемости функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  следует ее ограниченность на нем, а следовательно, и на отрезке  $[a^*, b^*]$ . Если  $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=0}^{j=j_\tau^*}$  - какое-либо разбиение отрезка  $[a^*, b^*]$ , то всегда, добавив к нему соответствующее конечное множество точек, лежащих на отрезках  $[a, b]$ , но уже вне отрезка  $[a^*, b^*]$ , можно получить разбиение  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ ,  $k_\tau \geq j_\tau^*$ , отрезка  $[a, b]$  той же мелкости

$$|\tau| = |\tau^*|. \quad (5)$$

Обозначив посредством  $\omega_k(f)$  и  $\omega_j^*(f)$  колебания функции  $f$  соответственно на отрезках  $[x_{k-1}, x_k]$  и  $[x_{j-1}^*, x_j^*]$  и заметив, что  $\sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f) \Delta x_k$  отличается от  $\sum_{j=1}^{j_\tau^*} \omega_j^*(f) \Delta x_j^*$ ,  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $\Delta x_j^* = x_j^* - x_{j-1}^*$ ,

на неотрицательные слагаемые вида  $\omega_k(f) \Delta x_k$ , соответствующие отрезкам  $[x_{k-1}, x_k]$  разбиения  $\tau$ , лежащим вне отрезка  $[a^*, b^*]$ , получим

$$0 \leq \sum_{j=1}^{j_\tau^*} \omega_j^*(f) \Delta x_j^* \leq \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f) \Delta x_k \quad (6)$$

Из интегрируемости функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$ , согласно следствию 1 теоремы 2 из п. 23.5, вытекает, что  $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{k_\tau} \omega_k(f) \Delta x_k = 0$ , поэтому в силу (5) и (6)  $\lim_{|\tau^*| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{j_\tau^*} \omega_j^*(f) \Delta x_j^* = 0$ , а это, согласно тому же следствию теоремы 2 п. 23.5, и означает интегрируемость функции  $f$  на отрезке  $[a^*, b^*]$ .

4°. А д д и т и в н о с т ь и н т е г р а л а.. Если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и  $a < c < b$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (7)$$

▷ Если  $\tau_a^c$  и  $\tau_c^b$  - разбиения соответственно отрезков  $[a, c]$  и  $[c, b]$ , то объединение этих разбиений  $\tau = \tau_a^c \cup \tau_c^b$  является разбиением отрезка  $[a, b]$ , причем

$$|\tau_a^c| \leq |\tau|, \quad |\tau_c^b| \leq |\tau| \quad (8)$$

Пусть  $\sigma_{\tau_a^c}$  и  $\sigma_{\tau_c^b}$  - какие-либо интегральные суммы Римана функции  $f$ , соответствующие разбиениям  $\tau_a^c$  и  $\tau_c^b$ ; тогда

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau_a^c} + \sigma_{\tau_c^b} \quad (9)$$

- интегральная сумма Римана функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$ .

Согласно свойству 2° из интегрируемости функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  следует ее интегрируемость на отрезках  $[a, c]$  и  $[c, b]$ . Следовательно, интегральные суммы  $\sigma_\tau, \sigma_{\tau_a^c}$  и  $\sigma_{\tau_c^b}$  при условии, что мелкости указанных разбиений  $\tau, \tau_a^c$  и  $\tau_c^b$  стремятся к нулю, имеют конечные пределы - интегралы от функции по указанным отрезкам:

$$\lim_{|\tau_a^c| \rightarrow 0} \sigma_{\tau_a^c} = \int_a^c f(x)dx, \quad \lim_{|\tau_c^b| \rightarrow 0} \sigma_{\tau_c^b} = \int_c^b f(x)dx, \quad \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sigma_\tau = \int_a^b f(x)dx.$$

Поэтому, перейдя к пределу в равенстве (9) при условии  $|\tau| \rightarrow 0$  (при этом в силу (8)  $|\tau_a^c| \rightarrow 0$  и  $|\tau_c^b| \rightarrow 0$ ), получим формулу (7).  $\triangleleft$

## 2.2 Задание 3

На данном графике предоставлены в полярной системе координат такие функции, как  $\sin(4*t)$  и  $\cos(2*t)$ . Они были построены в gnuplot так:

```
set polar
plot cos(2*t)
plot sin(4*t)
```

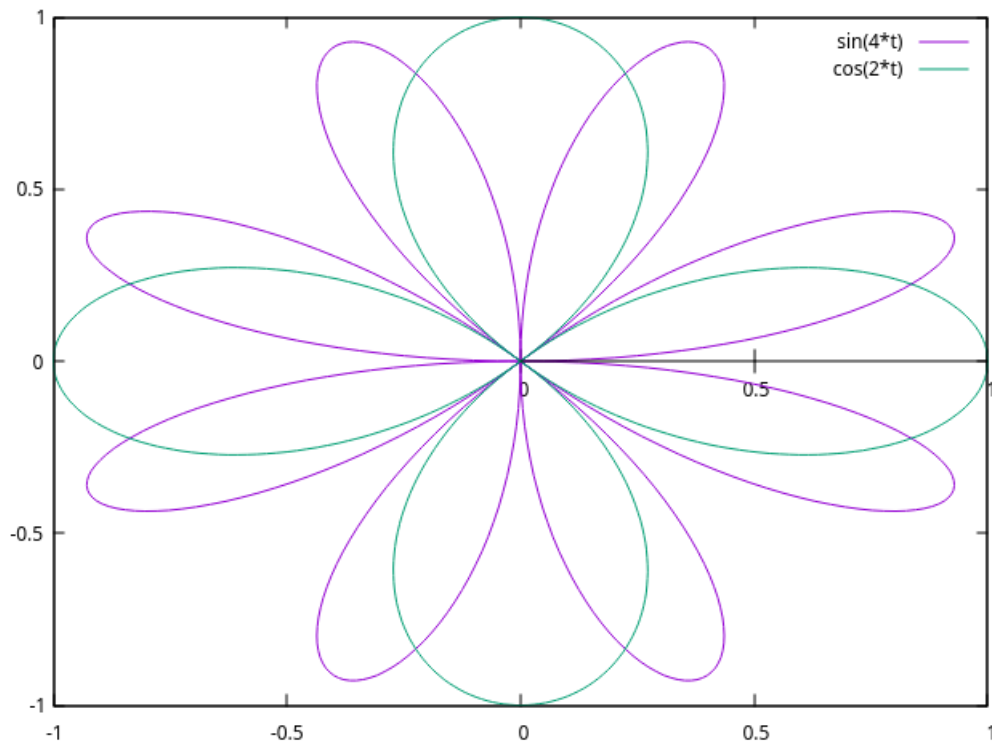


Рис. 1: График, сделанный в gnuplot.