

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Кириенко В.С. группа 22101

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Готовая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
1.1	Задание 2	3
1.2	Задание 3	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	6

1 Описание работы

1.1 Задание 2

Подготовить документ, содержащий математический текст, предоставленный инструктором. (страницы берутся из Том 1, Том 2)

Скринкаст о наборе математических формул.

Скринкаст о рубрикации текста и специальных абзацах.

Скринкаст об оформлении новых окружений (теоремы, леммы и пр.) и команд.

Внимание! Разделы, если они есть, и нумерация формул должны быть оформлены автоматически.

1.2 Задание 3

С помощью интерпретатора команд `gnuplot` построить изображение кривой в декартовых координатах и разместить его в документе, подготовленном во время выполнения задания 2.

Скринкасты о работе с `gnuplot`: Первый, Второй .

Плавающие объекты Скринкаст

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Лабораторная работа была выполнена и был подготовлен документ, содержащий математический текст, предоставленный инструктором (Том 1, страницы 129-131). Ниже приведен результат работы.

и в то же время

$$|x' - x| = |h| < \delta.$$

Ясно, что всякая равномерно непрерывная по отрезке функция непрерывна на нем: если в определении равномерной непрерывности зафиксировать точку x , то получится определение непрерывности в этой точке. Верно и обратное утверждение.

Теорема 1 (Кантора) *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.*

▷ Докажем теорему от противного. Допустим, что существует непрерывная на некотором отрезке $[a, b]$ функция f , которая, однако, на нем не равномерно непрерывна. Это означает (см. (7.22)), что существует такое $\xi_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся такие точки $x \in [a, b]$ и $x' \in [a, b]$, что $|x' - x| < \delta$, но $|f(x') - f(x)| \geq \epsilon$. В частности, для $\sigma = 1/n$ найдутся такие точки, обозначим их x_n, x'_n , что

$$|x'_n - x_n| < \frac{1}{n} \quad (1)$$

но

$$|f(x'_n) - f(x_n)| \geq \epsilon_0. \quad (2)$$

Из последовательности точек x_n в силу свойства компактности отрезка (см. теорему 4 в п. 5.8) можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k} . Обозначим ее предел x_0 :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \quad (3)$$

Поскольку $a \leq x_{n_k} \leq b, k = 1, 2, \dots$, то $a \leq x_0 \leq b$. Функция f непрерывна в точке x_0 , поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \quad (4)$$

Подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$ последовательности $\{x'_n\}$ также сходится в точке x_0 , ибо

$$|x'_{n_k} - x_0| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| \underset{(1)}{<} \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \underset{(3)}{\rightarrow} 0$$

при $k \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0) \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})] = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

а это противоречит условию, что при всех $k = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$|f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})| \underset{(2)}{\geq} \epsilon_0 > 0$$

Полученное противоречие доказывает теорему. <

Условие равномерной непрерывности можно сформулировать в терминах так называемых колебаний функции на отрезках.

Определение 3. Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Тогда величина

$$\omega(f; [a, b]) = \sup_{x, x' \in [a, b]} |f(x') - f(x)| \quad (6)$$

называется колебанием функции f на отрезке $[a, b]$. Из двух значений $f(x') - f(x)$ и $f(x) - f(x')$ одно неотрицательно и, следовательно, не меньше второго, поэтому величина верхней грани и в правой части равенства не изменится, если вместо абсолютной величины $|f(x') - f(x)|$ разности $f(x') - f(x)$ взять саму эту разность:

$$\omega(f; [a, b]) = \sup_{x, x' \in [a, b]} (f(x') - f(x)).$$

Справедливо следующее утверждение. Для того чтобы функция f была равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что для любого отрезка $[x, x'] \subset [a, b]$ такого, что $0 < x' - x < \delta$, выполнялось неравенство

$$\omega(f; [x, x']) < \varepsilon \quad (7)$$

▷ Действительно, поскольку $x, x' \in [x, x']$, то из неравенства (7) следует, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, а поэтому выполняется утверждение (7.22).

Обратно, если справедливо утверждение (7.22), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек x и x' отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2$. В частности, это неравенство выполняется и для всех таких точек $x, x' \in [a, b]$, для которых $0 < x' - x < \delta$. Но для любых двух точек ξ и η отрезка $[x, x']$ выполняется, очевидно, неравенство $0 < |\eta - \xi| < x' - x < \delta$, а следовательно, и неравенство $|f(\eta) - f(\xi)| < \varepsilon/2$. Поэтому для любого отрезка $[x, x']$ такого, что $0 < x' - x < \delta$, имеем

$$\omega(f; [x, x']) = \sup_{\xi, \eta \in [x, x']} |f(\eta) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Утверждение доказано. <

§ 8. Непрерывность элементарных функций

8.1. Многочлены и рациональные функции.

Теорема 2 *Многочлен непрерывен на всей числовой оси.*

▷ Действительно, во-первых, постоянная на всей числовой оси функция непрерывна во всех точках (см. свойство 3° пределов функций в п. 6.7); во-вторых, функции $x^k, k = 1, 2, \dots$, также непрерывны на всей числовой оси (см. пример в п. 7.3), а любой многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ является линейной комбинацией функций $1, x, x^2, \dots, x^n$ с коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$, поэтому, согласно следствию из свойства 6° пределов функции в п. 6.7, он непрерывен на всей числовой оси. <

Теорема 3 *Рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, непрерывна во всех точках числовой оси, в которых $Q(x) \neq 0$.*

▷ Это сразу следует из непрерывности многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ на всей числовой оси и непрерывности частного непрерывных функций во всех точках, в которых знаменатель не обращается в нуль (см. следствие из свойства 6° пределов функций в п. 6.7). <

8.2. Показательная и логарифмическая функции. Перечислим основные свойства степеней $a^r, a > 0$, с рациональными показателями $r \in Q$ (см. п. 2.1). 1. Пусть $r_1 < r_2$. Если $a > 1$, то $a^{r_1} < a^{r_2}$, а если $a < 1$, то $a^{r_1} > a^{r_2}$. 2° $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$. 3° $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$. Эти свойства доказываются в курсе элементарной математики в предположении существования и однозначной определенности a^r для любого рационального $r, a > 0$, а это было доказано в п. 7.3. Вспомним еще, что $a^0 = 1$ и что $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$. Из свойства 1° вытекает, что для любого $r \in Q$ выполняется неравенство $a^r > 0$. В самом деле, если $a \geq 1$ и $r \geq 0$, то по свойству 1° $a^r \geq a^0 = 1 > 0$. Отсюда следует, что $a^{-r} = \frac{1}{a^r} > 0$. Аналогично рассматривается случай $0 < a < 1$.

Нашей ближайшей задачей является определение значения выражения a^x для любого действительного числа x и $a > 0$. Затем будут изучены свойства функции a^x . Лемма 1. Для любого $a > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-1/n} = 1. \quad (8)$$

Следствие. Для любого $a > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0, r \in Q} a^r = 1 \quad (9)$$

▷ Пусть сначала $a > 1$. Для любого $n \in N$ положим

$$x_n = a^{1/n} - 1 \quad (10)$$

2.2 Задание 3

С помощью интерпретатора команд `gnuplot` было построено изображение графика функции $\sin(x) - 2\cos(x)$. После чего изображение данного графика было размещено в документе, подготовленном во время выполнения задания 2.

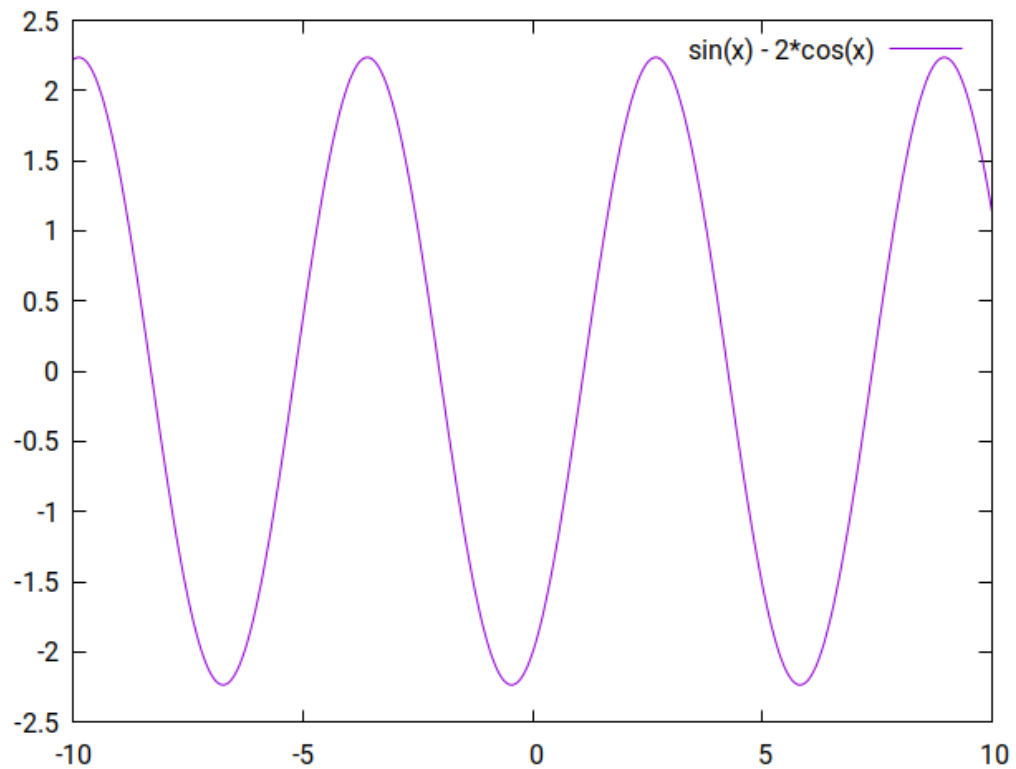


Рис. 1: График функции $\sin(x) - 2 * \cos(x)$