

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:

Дорошин А. П группа 22103 #

подпись

Руководитель практики:

к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задания 2	3
2.2	Задания 3	6

1 Описание работы

Всего нам надо было выполнить 3 задания связанных с LaTeX. В первом из них мы ознакомились с структурой преамбулы и местом для написания документа, так же мы смогли написать свой небольшой текст и преобразовать свой первый файл формата tex в файл формата pdf с помощью команды pdflatex. Во второй работе каждый из нас переписал 3 страницы из одного общего учебника. Там мы уже использовали множество команд для написания уникальных структур, которые встречались нам на страницах книги. Для каждой из них надо было использовать символ \ (Даже для просто написания \, мне приходится использовать команду!), а потом указывать нужную нам команду. В третьей мы познакомились с новым инструментарием gnuplot, который помог нам построить свой собственный pdf файл, который мы так же смогли вставить в свою вторую работу. Таким образом в общем плане у нас получилась небольшая работа из нескольких страниц и картина криволинейной прямой.

2 Результаты работы

2.1 Задания 2

Отсюда

$$z = x + yi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1)$$

Правая часть этого равенства называется *тригонометрической формой записи комплексного числа z* . Мы будем её употреблять и для $z=0$; в этом случае $r=0$, а φ может принимать любое значение — аргумент числа 0 не определен. Итак, всякое комплексное число можно записать в тригонометрической форме.

Ясно также, что если комплексное число z записано в виде $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r \geq 0$, то число r является его модулем (ибо $r = \sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2}$), а φ — одним из значений его аргумента.

Запись операций умножения, деления и возведения в степень в тригонометрической форме. Тригонометрическую форму записи комплексных чисел бывает удобно использовать при перемножении комплексных чисел, в частности, она позволяет выяснить геометрический смысл произведения комплексных чисел.

Найдем формулы для умножения и деления комплексных чисел при тригонометрической форме их записи. Если

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

то по правилу умножения комплексных чисел получим

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их абсолютные величины перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad (2)$$

(второе равенство является равенством двух множеств). Отметим, что эту простую формулу для аргумента произведения комплексных чисел нельзя было бы написать, если бы мы с самого начала ограничились однозначным выбором аргументов комплексных чисел, например с помощью неравенств

$$-\pi < \arg z \leq \pi \quad (3)$$

так как сумма $\arg z_1 + \arg z_2$ могла бы уже удовлетворять этому неравенству, хотя $\arg z_1$ и $\arg z_2$ ему удовлетворяли.

Применив последовательно формулы (2) к произведению n комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_n$, получим

$$|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| |z_2| \cdots |z_n|,$$

$$\arg(z_1 z_2 \cdots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \cdots + \arg z_n.$$

Если $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, то из полученных равенств следует, что

$$|z^n| = |z|^n, \arg z^n = n \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

Следует обратить внимание на то, что вторая формула (4) представляет собой равенство множеств: если φ — какое-либо значение аргумента числа z и, следовательно, $n\varphi$ — значение аргумента z^n , то левая часть равенства состоит из всех чисел вида

$$n\varphi + 2\pi m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

а правая — из всех чисел вида

$$n(\varphi + 2\pi m) + 2\pi k = n\varphi + 2\pi(nm + k),$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

Нетрудно убедиться, что эти два множества состоят из одних и тех же чисел. Отсюда видно, что $\arg z^n \neq n \arg z$, так как здесь правая часть состоит лишь из чисел вида $n\varphi + 2\pi m = n\varphi + 2\pi nm$, т. е. таких чисел, которые получаются прибавлением к числу $n\varphi$ не всевозможных чисел вида $2\pi m$, т. е. чисел, кратных 2π , а лишь чисел, кратных числу $2\pi n$.

Отметим ещё, что формула (4) равносильна утверждению: если $\varphi \in \arg z$, то

$$n\varphi \in \arg z^n \quad (5)$$

Поэтому если $z = r(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, то

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (6)$$

Отсюда для комплексного числа, абсолютная величина которого равна 1 (следовательно, оно имеет вид $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$), получаем

$$\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Эта формула называется *формулой Муавра*¹

Если $z = z_1/z_2, z_2 \neq 0$, т. е. $z_1 = z_2 z$, то $|z_1| = |z_2| |z|$ и $\arg z_1 = \arg z_2 + \arg z$. Таким образом,

$$|z| = |z_1|/|z_2|, \arg z = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Иначе говоря, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Извлечения корня. Если n — натуральное число, $z \in \mathbb{C}$, то *корнем n -й степени $\sqrt[n]{z}$* из комплексного числа z называется такое число ω , что

$$\omega^n = z. \quad (7)$$

Например, числа i и $-i$ являются корнями степени 2 (квадратными корнями) из числа $z = -1$, так как $i^2 = -1$ и $(-i)^2 = -1$. На этом примере уже видно, что число $\sqrt[n]{z}$ определено неоднозначно: для $z = -1$ может быть $\sqrt{-1} = i$, а может быть и $\sqrt{-1} = -i$. При этом, в

¹ А. Муавр (1667-1754) — английский математик.

отличие от области действительных чисел, когда можно было рассматривать положительные и отрицательные значения корня, говорить о знаке корня в комплексной области нельзя, так как существенно комплексные числа не разбиваются на положительные и отрицательные: у существенно комплексного числа "нет знака". Поэтому при употреблении записи $\sqrt[n]{z}, z \in \mathbb{C}$, всегда надо отдавать себе отчет в том, что именно в рассматриваемом случае обозначает собой символ $\sqrt[n]{z}$.

Если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\omega = p(\cos \psi + i \sin \psi)$ и $\omega^n = z$, то

$$p^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

(7)

(6)

Отсюда $p^n = r$, а следовательно, $p = \sqrt[n]{r}$, где корень n -й степени понимается в арифметическом смысле, т. е. $p \geq 0$, и

$$n\psi = \varphi + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

или

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$$

.

Для того чтобы получить все возможные различные значения корней n -й степени, здесь достаточно ограничиться лишь значениями $k = 0, 1, \dots, n-1$:

$$\psi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k, k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (8)$$

так как при $k = n$ получим $\psi_n = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$, т. е. значение аргумента ψ_n отличается от значения аргумента $\psi_0 = \frac{\varphi}{n}$ на 2π и при остальных значениях k будут получаться значения угла ψ , отличающиеся от одного из значений $\psi_k, k = 0, 1, \dots, n-1$, на кратное число 2π , а поэтому соответствующее значение корня будет совпадать с одним из чисел

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos \psi_k + i \sin \psi_k), k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (9)$$

Таким образом, корень n -й степени из числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ имеет n значений $\omega_k, k = 0, 1, \dots, n-1$, для которых справедливы формулы (8) и (9). Все значения корня $\sqrt[n]{z}$ имеют одинаковые модули $\sqrt[n]{r}$, а аргумент ψ_k корня ω_k получается из аргумента ψ_{k-1} корня $\omega_{k-1}, k = 0, 1, \dots, n-1$, так же, как и аргумент $\psi_0 = \varphi/n$ корня ω_0 , — из аргумента ψ_{n-1} корня ω_{n-1} прибавлением числа $2\pi/n$. Отсюда следует, что если начало всех векторов $\omega_k, k = 0, 1, \dots, n-1$, поместить в начало координат, то их концы будут находиться в вершинах правильного n -угольника. На рис. 11 изображены корни $\sqrt[6]{1} - 1$

Сопряженные комплексные числа. Для каждого комплексного числа $z = x + yi$ число $x - yi$ называется ему *сопряженным* и обозначается $\bar{z}$. Геометрический вектор $\vec{z}$ симметричен с вектором z

2.2 Задания 3

