

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:

Чуркина Я.И. группа 22101

подпись

Руководитель практики:

к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
1.1	Задание 2	3
1.2	Задание 3	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	7

1 Описание работы

1.1 Задание 2

Подготовить документ, содержащий математический текст, предоставленный инструктором. (страницы берутся из Том 1, Том 2)

Скринкаст о наборе математических формул.

Скринкаст о рубрикации текста и специальных абзацах.

Скринкаст об оформлении новых окружений (теоремы, леммы и пр.) и команд.

1.2 Задание 3

С помощью интерпретатора команд `gnuplot` построить изображение кривой в декартовых координатах и разместить его в документе, подготовленном во время выполнения задания 2.

Скринкасты о работе с `gnuplot`: Первый, Второй .

Плавающие объекты Скринкаст

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Лабораторная работа была выполнена и был подготовлен документ, содержащий математический текст, предоставленный инструктором (Том 1, страницы 126-128). Ниже приведен результат работы

Из непрерывности функции f в точке x^* следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(x_{n_{k_s}}) = f(x^*)$$

Но предел подпоследовательности $\{f(x_{n_{k_s}})\}$ последовательности $y_n = f(x_n), n = 1, 2, \dots$, равен пределу всей последовательности, поэтому

$$f(x^*) = \lim_{s \rightarrow \infty} f(x_{n_{k_s}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \stackrel{(7.14)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

А так как $y_0 \stackrel{(7.14)}{=} f(x_0)$, то получилось, что $f(x^*) = f(x_0)$. Это же в силу взаимной однозначности отображения f противоречит неравенству (7.16). Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)$$

т.е. обратная функция f^{-1} непрерывна в произвольно выбранной точке $y_0 \in [A, B]$. $\triangleleft$

Теорема 1 Если функция f непрерывна и строго возрастает на интервале (a, b) ,

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x), B = \lim_{x \rightarrow b} f(x) \quad (1)$$

то $f((a, b)) = (A, B)$ и обратная функция f^{-1} является однозначной строго возрастающей непрерывной на интервале (A, B) функцией. $\triangleright$

Поскольку из (1) следует, что

$$A = \inf_{(a, b)} f(x), B = \sup_{(a, b)} f(x) \quad (2)$$

(см. теорему 4 из п. 6.11), то для любого $x \in (a, b)$ в силу определения нижней f и верхней границ функции имеет место равенство

$$A = \inf f \leq f(x) \leq f = B$$

Более того, для всех $x, a < x < b$, выполняется строгое неравенство $A < f(x) < B$. В самом деле, если бы нашлась, например, такая точка $x \in (a, b)$, что $f(x) = A$, то для любой точки $x', a < x' < x$, в силу строгого возрастания функции f имело бы место неравенство

$$f(x') < f(x) = A = \inf_{(a, b)} f(x)$$

что противоречит определению нижней грани. Итак,

$$f((a, b)) \subset (A, B) \quad (3)$$

Пусть теперь

$$A = \inf f < y < \sup f = B$$

Тогда согласно определению нижней и верхней границы функции существуют такие точки $x_1 \in (a, b)$ и $x_2 \in (a, b)$, что

$$A < f(x_1) < y < f(x_2) < B$$

В силу строгого возрастания и непрерывности сужения функции f на отрезок $[x_1, x_2]$ обратная для него функция определена и непрерывна на отрезке $[f(x_1), f(x_2)]$ (см. теорему 3). А тогда, во-первых, существует такая точка $x \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$, что $f(x) = y$ и, следовательно, $f((a, b)) = (A, B)$, а во-вторых, сужение на отрезок $[f(x_1), f(x_2)]$ обратной функции f^{-1} непрерывно во внутренней точке y отрезка $[f(x_1), f(x_2)]$, а поэтому в этой точке непрерывна и обратная функция f^{-1} , рассматриваемая на всем множестве своего определения, т.е. на интервале (A, B) .

Отметим, что последнее заключение следует из того, что если сужение какой-либо функции на множество, содержащее некоторую окрестность заданной точки, непрерывно в этой точке, то и сама функция, рассматриваемая на всем множестве своего определения, непрерывна в указанной точке, так как непрерывность в точке зависит лишь от значений функции в достаточно малой окрестности этой точки. $\triangleleft$

Отметим, что в теореме 4 интервалы (a, b) и (A, B) могут быть как конечными, так и бесконечными: $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $-\infty \leq A < B \leq +\infty$.

Утверждения, аналогичные теоремам 3 и 4, имеют место и для строго убывающей функции.

Пример. Функция $y = x^n, n \in \mathbf{N}$ строго возрастает на полуоси другая $x > 0$ и непрерывна на всей числовой оси. Действительно, если $0 < x_1 < x_2$, то умножая n раз это неравенство само на себя, получим $0 < x_1^n < x_2^n$; это и означает строгое возрастание рассматриваемой функции. Для доказательства ее непрерывности заметим, что функция $y = x$ непрерывна на всей числовой оси. В самом деле, каковы бы ни были $x_0 \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon > 0$, возьмем $\delta = \varepsilon$. Если $y_0 = x_0$, то $\Delta y = y - y_0 = x - x_0 = \Delta x$. Поэтому при $|\Delta x| < \delta$ получим $|\Delta y| = |\Delta x| < \delta = \varepsilon$, т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, а это и является условием непрерывности функции $y = x$. Функция же $y = x^n$ непрерывна на всей числовой оси (в частности, при $x > 0$) как произведение n непрерывных функций $y = x$.

Из того, что $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, следует согласно теореме 4, что множество заданных значений функции $y = x^n$ на интервале $(0, +\infty)$ также является интервалом $(0, +\infty)$. Отсюда согласно той же теореме вытекает, что обратная функция $x = \sqrt[n]{y}$ определена, строго возрастает и непрерывна на интервале $(0, +\infty)$. Поэтому, в частности, из любого положительного числа можно извлечь положительный корень n -й степени, и притом единственный, а следовательно, для любого рационального числа r однозначно определена степень $a^r, a > 0$, такая, что $a^r > 0$ (см. п. 2.1)

Замечание. Аналоги теорем 3 и 4 имеют место и для функций, строго монотонных и непрерывных на конечных или бесконечных

полуинтервалов вида $[a, b]$ и $(a, b]$. Их формулировка и доказательство по мере потребности представляются читателю

7.4 Равномерная непрерывность. Если функция f непрерывна на отрезке, то это означает, что любой точки x этого отрезка и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (зависящее от точки x и числа ε), что для всех точек x' отрезка, для которых

$$|x' - x| < \delta \quad (4)$$

выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon \quad (5)$$

Если число δ можно выбрать не зависящим от точки x так, чтобы при выполнении условия (4) выполнялось условие (5), то функция f называется *равномерно непрерывной*. Сформулируем определение этого важного понятия более подробно.

Определение 2. Функция f , заданная на отрезке $[a, b]$ называется *равномерно непрерывной на нем*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x \in [a, b]$ и $x' \in [a, b]$ таких, что $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.

В символической записи определение непрерывности функции на отрезке выглядит следующим образом:

$$\forall x \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \forall x', \quad |x' - x| < \delta : |f(x') - f(x)| < \varepsilon,$$

а определение равномерной непрерывности выглядит так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \forall x', x \quad |x' - x| < \delta : |f(x') - f(x)| < \varepsilon, \quad (6)$$

Здесь точки x и x' принадлежат отрезку, на котором задана функция f

Примеры. 1. Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси $\mathbf{R}$. Действительно, если задано $\varepsilon > 0$, то, выбрав $\delta = \varepsilon$, получим, что для любых точек x и x' таких, что $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| = |x' - x| < \delta = \varepsilon,$$

т.е. условия определения 1 выполнены

2. Функция $f(x) = x^2$ не равномерно непрерывна на всей числовой оси $\mathbf{R}$.

Это следует из того, что для любого $h \neq 0$ имеет место

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x + h) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x + h)^2 - x^2] = \lim_{x \rightarrow \infty} (2hx + h^2) = \infty. \quad (7)$$

Поэтому, если задано $\varepsilon > 0$, то, каково бы ни было $\delta > 0$, зафиксировав $h \neq 0, |h| < \delta$, можно в силу (7) так выбрать x , что для точек $x' = x + h$ и x будем иметь

$$|f(x') - f(x)| > \varepsilon$$

2.2 Задание 3

С помощью интерпретатора команд `gnuplot` было построено изображение графика функции $y = \sin(x) - \cos(x)$. После чего изображение данного графика было размещено в документе, подготовленном во время выполнения задания 2. Ниже представлен график.

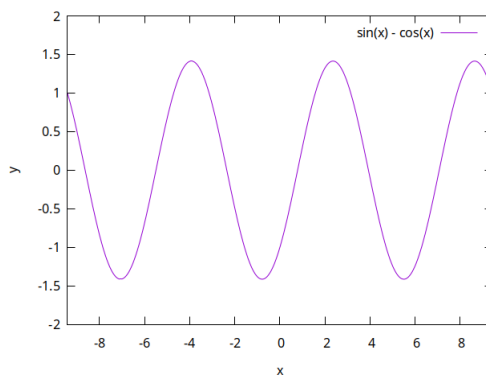


Рис. 1: График функции $y = \sin(x) - \cos(x)$