

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Артемьев К. А. группа 22103

подпись

Руководитель практики:
Е. И. Рыбин

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	6

1 Описание работы

В курсе “Учебная практика: компьютерные технологии в математике” ставилась цель освоения инструментов работы с математическими текстами, обучение владению построения научных графиков с помощью системы Gnuplot. В процессе выполнения первого задания я обучился трансляции LaTeX файлов в другие форматы, а именно как конвертировать файл .tex в .pdf и .dvi с помощью команд. Вторым заданием каждому было необходимо переписать математический текст, в процессе выполнения которого я ознакомился со спецсимволами, научился писать сложные математические текста, ведь там надо было использовать команды со спецсимволами. Выполняя третье задание, я узнал как с помощью системы Gnuplot строить необходимые графики в pdf-формате, а так же успешно включать их в свои работы. В ходе курса я приобрёл знания, которые в дальнейшем позволят мне самому писать свои математические тексты с помощью различных формул, оформлений, а так же строить графики и использовать их в своих работах.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

то через конечное число шагов (не больше, чем n) он получает некоторый номер m и в множестве Y , т. е. будет обозначен y_m , причем, по-скольку множество Y бесконечно, этот процесс может быть продолжен неограниченно. Таким образом, все элементы множества Y окажутся перенумерованными, что и означает счетность этого множества. $\triangleleft$

Теорема 5 *Множество всех рациональных чисел счетно*

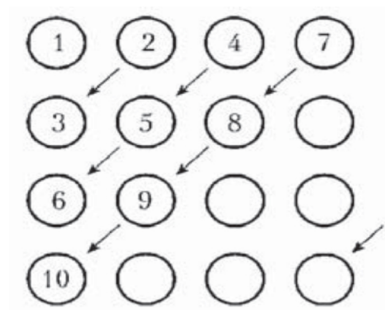
▷ Расположим все рациональные числа в таблицу, содержащую бесконечное число строк и столбцов, следующим образом (см. таблицу):

0	1	-1	2	-2	...
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	...
...	...	...	...	...	...
$\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n}$	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

Здесь в n -ю строчку помещены рациональные числа, записываемые несократимыми рациональными дробями со знаменателем n и

упорядоченные по возрастанию их абсолютных величин, причем непосредственно за каждым положительным числом следует ему противоположное. Очевидно, что каждое рациональное число находится на каком-то месте в этой таблице.

Занумеруем теперь элементы получившейся таблицы согласно следующей схеме, в которой в кружочках стоят номера соответствующих элементов, а стрелки указывают направление нумерации.



В результате все рациональные числа оказываются занумерованными, т. е. множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел

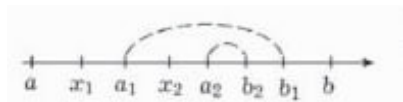
счетно. $\triangleleft$

Возникает естественный вопрос, существуют ли несчетные множества, т.е. бесконечные множества, не являющиеся счетными, а если существуют, то интересно построить пример несчетного множества.

Лемма 3 *Любой отрезок множества действительных чисел состоит из бесконечного множества точек.*

▷ Допустим противное: пусть точки некоторого отрезка $[a, b]$, $a \in R, b \in R, a < b$, можно занумеровать: $[a, b] = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Выберем

какой-то отрезок $[a_1, b_1]$, лежащий на $[a, b]$ и не содержащий точки x_1 (рис. 48):



$$x_1 \notin [a_1, b_1] \subset [a, b].$$

Рис. 48:

Далее выберем отрезок $[a_2, b_2]$, лежащий на $[a_1, b_1]$ и не содержащий точки x_2 , и т. д. Таким образом, если выбран отрезок $[a_n, b_n]$, то выберем отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, лежащий на $[a_n, b_n]$ и не содержащий точки x_{n+1} . Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, такую, что

$$x_n \notin [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Следовательно, ни одна точка x_n не принадлежит пересечению $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, но согласно принципу вложенных отрезков (см. п. 4.5, теорема 3) существует точка, обозначим её ξ , принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$:

$$\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

а поэтому и отрезку $[a, b]$, ибо $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ при всех $n = 1, 2, \dots$. А так как все точки отрезка $[a, b]$ по предположению перенумерованы, то точка ξ так же должна иметь какой-то номер, т. е. существует такое натуральное число n_0 , что $\xi = x_{n_0}$, и тогда согласно (2) получим

$$x_0 \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

В частности $x_0 \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, а это противоречит условию (1). ◁

Теорема 6 (Кантор*) *Множество всех действительных чисел бесконечно.*

▷ Если бы множество всех действительных чисел было счетным, то было бы счетным, согласно лемме 2, и любое его подмножество, в частности, любой отрезок, что противоречит лемме 3. ◁

§5. Предел числовой последовательности

5.1 Определение предела числовой последовательности.

Одним из важнейших понятий математического анализа является понятие предела. Начнем его изучение с предела последовательности действительных чисел. Напомним (см. п. 4.6*, пример 5), что последовательностью $\{x_n\}$ элементов некоторого множества X обозначается через x_n . В частности, последовательностью действительных чисел является "занумерованное" натуральными числами некоторое множество $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ действительных чисел, причем члены последовательности с разными номерами могут иметь одно и то же значение. Примерами последовательностей являются $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ и $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$. В дальнейшем в этом параграфе буквой n всегда обозначаются натуральные числа.

Под бесконечно удаленной точкой числовой прямой будем понимать одну из бесконечностей $+\infty, -\infty, \infty$ (см. п. 2.2).

Определение 1 Конечная или бесконечно удаленная точка числовой прямой называется *пределом* некоторой числовой последовательности действительных чисел, если какова бы ни была окрестность точки, она содержит все члены рассматриваемой последовательности, начиная с некоторого номера.

Этот номер зависит, вообще говоря, от выбора окрестности точки a . Сформулированное условие равносильно тому, что вне любой окрестности точки находится лишь конечное число членов рассматриваемой последовательности. Вспомнив, что окрестности конечных и бесконечно удаленных точек числовой прямой определяются заданием некоторого числа $\epsilon > 0$ (п. 2.2), определение предела последовательности действительных чисел можно перефразировать следующим образом.

Точка a (конечная или бесконечно удаленная) числовой прямой называется *пределом* числовой последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел, если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ , что для всех номеров $n > n_\epsilon$ все члены x_n содержатся в окрестности $U(a; \epsilon)$:

$$x_n \in U(a; \epsilon), n > n_\epsilon. \quad (1)$$

Если выполняется это условие, то пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ или $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$ (а иногда пишут $x_n \rightarrow a$, $n = 1, 2, \dots$) и говорят, что члены последовательности $\{x_n\}$ стремятся к a .

С помощью логических символов существования и всеобщности определение предела записывается следующим образом:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon : \forall n > n_\epsilon \quad x_n \in U(a; \epsilon) \quad (2)$$

Если предел последовательности действительных чисел является конечной точкой числовой прямой, т. е. числом, то говорят, что последовательность *имеет конечный предел*.

Определение 2 Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она называется *сходящейся*.

Для случая конечного предела определение 1 предела можно перефразировать следующим образом.

Число a является пределом последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел, если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ , что для всех номеров $n > n_\epsilon$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \epsilon \quad (3)$$

В логических символах эта формулировка выглядит следующим образом:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \quad \forall n > n_\epsilon : |x_n - a| < \epsilon. \quad (4)$$

2.2 Задание 3

При работе с графиками я использовал бесплатную утилиту gnuplot, создавая pdf-файлы и прикрепляя их к файлу LaTeX.

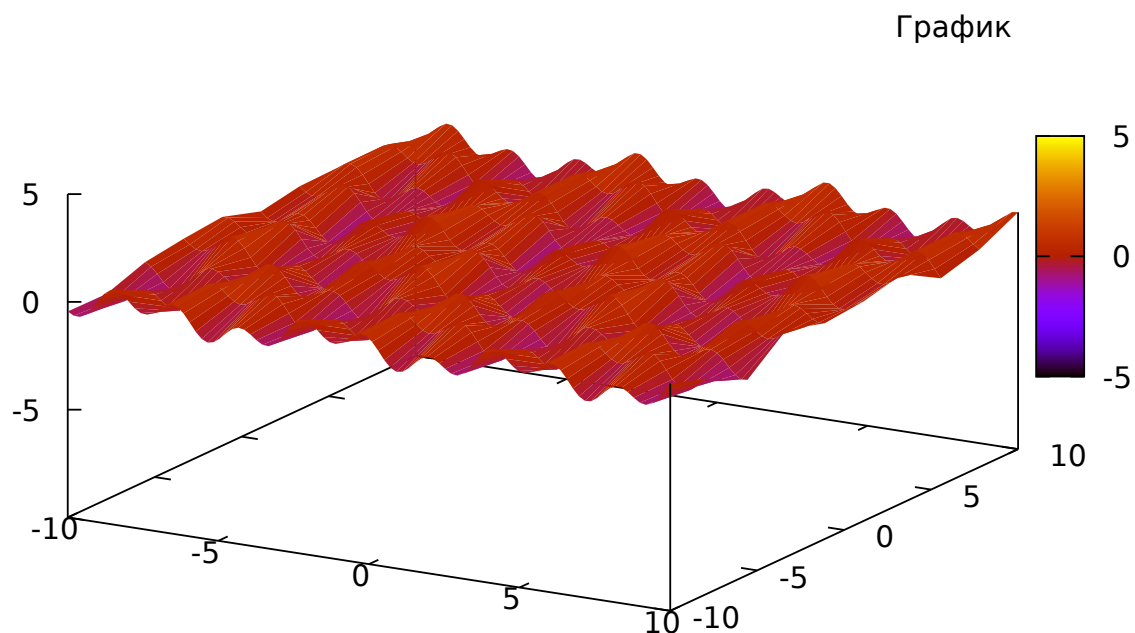


Рис. 1: График 3 лабораторной работы