

Теорема 1. Если кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t); a \leq t \leq b\}$ непрерывно дифференцируема, то она спрямляема и ее длина S_Γ удовлетворяет неравенству

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leq S_\Gamma \leq c(b - a), \quad (1)$$

где

$$c = \max_{[a,b]} |\mathbf{r}'(t)| \quad (2)$$

► Прежде всего заметим, что в силу непрерывности на отрезке $[a, b]$ производной $\mathbf{r}'(t)$ числовая функция $|\mathbf{r}'(t)|$ также непрерывна на этом отрезке, а следовательно, ограничена и принимает на нем наибольшее значение. Поэтому существует число $c = \max_{[a,b]} |\mathbf{r}'(t)| < +\infty$.

Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ отрезка $[a, b]$. Тогда, используя очевидное векторное тождество

$$\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a) = \sum_{i=1}^{i_\tau} \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}) \quad (3)$$

и применяя теорему 1 из п. 16.2, получим

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = \left| \sum_{i=1}^{i_\tau} \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^{i_\tau} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| \leq \quad (4)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{i_\tau} |\mathbf{r}'(\xi_i)| (t_i - t_{i-1}) \leq c \sum_{i=1}^{i_\tau} t_i - t_{i-1} = c(b - a), \quad (5)$$

где $t_{i-1} < \xi_i < t_i, i = 1, 2, \dots, i_\tau$. Так как $\sum_{i=1}^{i_\tau} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| \stackrel{(17.18)}{=} \sigma_\tau$ — длина вписанной в кривую Γ ломаной, соответствующей разбиению τ , то из неравенства 5 следует, что

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leq \sigma_\tau \leq c(b - a). \quad (6)$$

Перейдя в этом неравенстве к верхней грани по всевозможным разбиениям τ отрезка $[a, b]$, получим, в силу определения (17.19), неравенство

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leq S_\Gamma \stackrel{(17.19)}{=} \sup_{\Gamma} \sigma_\tau \leq c(b - a). \quad (7)$$

Поэтому $S_\Gamma < +\infty$, т.е. кривая Γ спрямляемая. ◁

Теорема 2. Если кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)); a \leq t \leq b\}$ непрерывно дифференцируема, то переменная длина дуги $s = s(t)$, отсчитывается от начала кривой Γ , является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра t и

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}. \quad (8)$$

► Как и выше, будем через $M(t)$ обозначать конец радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$. Пусть $s(t)$ - длина дуги кривой Γ от точки $M(a)$ до точки $M(t)$, $t \in [a, b]$, $t + \Delta t \in [a, b]$, и $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$. Очевидно, что $|\Delta s|$ является длиной дуги с концами в точках $M(t)$ и $M(t + \Delta t)$.

Поэтому согласно теореме 1 для $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ имеет место неравенство

$$|\Delta \mathbf{r}| = |\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)| \leq |\Delta s| \leq c |\Delta t|, \quad (9)$$

где c - наибольшее значение $|\mathbf{r}'(t)|$ на отрезке с концами в точках t и $t + \Delta t$. Обозначим через $\xi = \xi(\Delta t)$ точку этого отрезка, в которой

$$|\mathbf{r}'(\xi)| = c. \quad (10)$$

Поделим обе части равенства 9 на $|\Delta t|$, $\Delta t \neq 0$:

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| \leq \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| \leq c = |\mathbf{r}'(\xi)|. \quad (11)$$

Функция $s = s(t)$ возрастает (с увеличением дуги ее длина возрастает). Поэтому если $\Delta t > 0$, то $\Delta s \geq 0$, а если $\Delta t < 0$, то $\Delta s \leq 0$ и, следовательно, всегда $\frac{\Delta s}{\Delta t} \geq 0$, иначе говоря, $\left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Таким образом, неравенство 11 можно записать в виде

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| \leq \frac{\Delta s}{\Delta t} \leq |\mathbf{r}'(\xi)|. \quad (12)$$

Левая и правая части этого неравенства имеют при $\Delta t \rightarrow 0$ один и тот же предел, равный $|\mathbf{r}'(t)|$. В самом деле, в силу определения производной

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right| = |\mathbf{r}'(t)| \quad (13)$$

Из выполнения же условия $\xi \in [t, t + \Delta t]$ при $\Delta t > 0$ или условия $\xi \in [t + \Delta t, t]$ при $\Delta t < 0$ следует, что $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \xi = t$, а так как функция $|\mathbf{r}'(t)|$ непрерывна, то отсюда вытекает, что $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\mathbf{r}'(\xi)| = |\mathbf{r}'(t)|$. А тогда из неравенства 12 получаем, что предел $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ существует и так же равен $|\mathbf{r}'(t)|$. Это означает, что существует производная $s'(t)$ и что $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|$. Если $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, а потому

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}. \quad (14)$$

Замечание 1. Если длина σ дуг кривой Γ отсчитывается от ее конца, то $\sigma = S_\Gamma - s$ и, следовательно, $\frac{d\sigma}{ds} = -1$, поэтому

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{ds} \frac{ds}{dt} = -\frac{ds}{dt} = -|\mathbf{r}'(t)|. \quad (15)$$

Замечание 2. Если непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t); a \leq t \leq b\}$ не имеет особых точек ($\mathbf{r}'(t) \neq 0[a, b]$), т.е. Γ - гладкая кривая, то в силу теоремы 2 переменная длина дуги $s = s(t)$, отсчитываемая от начала $M(a)$ кривой Γ , является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией с производной, положительной во всех точках отрезка $[a, b]$: $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| > 0$. А так как $s(a) = 0$, $s(b) = S_\Gamma$, то обратная функция $t = t(s)$ однозначна, строго возрастает, непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, S_\Gamma]$ и

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \quad (16)$$

Таким образом, для всякой гладкой кривой ее параметр является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной длины дуги и производная этой функции нигде не обращается в нуль.

Следовательно, функция $t = t(s)$ есть допустимое преобразование параметра в смысле п. 17.1 и, следовательно, на гладкой кривой в качестве параметра можно взять переменную длину ее дуг. Из сказанного вытекает также, что имеет смысл производная

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \quad (17)$$

Вектор $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ только числовым множителем $\frac{dt}{ds}$ отличается от касательного вектора $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq \mathbf{0}$ и поэтому также направлен по касательной. Докажем, что вектор $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ является единичным вектором.

Теорема 3. Если на кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(s); 0 \leq s \leq S\}$ параметром является длина дуги и кривая непрерывно дифференцируема, то

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1 \quad (18)$$

▷ Из формулы 8 при $t = s$ имеем

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \frac{ds}{ds} = 1. \triangleleft \quad (19)$$

Поскольку на гладкой кривой можно взять за параметр длину дуги, то формула 18 имеет место для гладких кривых.

Разъясним геометрический смысл равенства 18.

Отрезок, соединяющий две точки кривой, называется *хордой*, стягивающей дугу кривой с концами в этих точках. Пусть кривая Γ кладкая и $\mathbf{r}(s), 0 \leq s \leq S$, - ее векторное представление, в котором в качестве параметра выбрана переменная длина дуги кривой $s \in [0, S]$.

Длина хорды, соединяющей концы радиус-векторов $\mathbf{r}(s_0)$ и $\mathbf{r}(s_0 + \Delta s), s_0 \in [0, S], s_0 + \Delta s \in [0, S]$, равна длине $|\Delta \mathbf{r}|$ вектора $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(s_0 + \Delta s) - \mathbf{r}(s_0)$ (рис. 94)

$\sin(x) \cdot \cos(y)$ —