

Определение векторной функции

Длины и скалярное произведение векторов

Пределы

Основные свойства пределов векторных функций

Теорема о дифференцируемости векторных функций.

Теорема о пределе вектор-функции.

Векторные функции

Содержание

- 1 Определение векторной функции
 - Способы задания
- 2 Длины и скалярное произведение векторов
- 3 Пределы
 - Пример 1.
 - Пример 2.
- 4 Основные свойства пределов векторных функций
- 5 Теорема о дифференцируемости векторных функций.
- 6 Теорема о пределе вектор-функции.

Предел и непрерывность векторной функции.

Векторными функциями называются функции, значениями которых являются векторы, а аргументами – числа.

Они обозначаются жирным шрифтом: $\mathbf{r}(t)$, или с помощью черты над значениями функции: $\overline{OM}(t)$, $t \in X$, где X – некоторое числовое множество.

Способы задания.

Если начала всех векторов закреплены в одной и той же точке (обычно – начало координат), то такие векторы называются *радиус-векторами*.

Задание вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, $t \in X$, эквивалентно заданию трех числовых функций $x(t), y(t), z(t)$, $t \in X$, являющихся его координатами:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in X. \quad (1)$$

Длина.

Длина (абсолютная величина) всякого вектора $\mathbf{a}$, обозначается $|\mathbf{a}|$ скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – через $\mathbf{a}\mathbf{b}$ или $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, а векторное – через $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ или $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Определение 1

Вектор $\mathbf{a}$ называют пределом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, $t \in X$, при $t \rightarrow t_0$ (или в точке $t = t_0$) и пишут

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}, \quad (2)$$

если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0. \quad (3)$$

Пределы.

$$\begin{aligned} \text{Если } \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ и } \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = \\ = \sqrt{[x(t) - a_1]^2 + [y(t) - a_2]^2 + [z(t) - a_3]^2} \end{aligned} \quad (4)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} |x(t) - a_1| &\leq |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|, \\ |y(t) - a_2| &\leq |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|, \\ |z(t) - a_3| &\leq |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|. \end{aligned} \quad (5)$$

Поэтому предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \quad (6)$$

векторной функции $\mathbf{r}(t)$ существует в том и только том случае, когда существуют пределы ее координат

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_1, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_2, \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_3. \quad (7)$$

Пределы.

Определение 2

Если t_0 – конечная точка и для функции $\mathbf{r}(t)$, $t \in X$, имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0), \quad (8)$$

то эта функция называется непрерывной в точке t_0 .

Как и в случае скалярных функций, условие выполняется тогда и только тогда, когда существует $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t)$ и $t_0 \in X$.

Если положить $\Delta t = t - t_0$, $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$, то условие 8 примет вид $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{r} = 0$.

Основные свойства пределов векторных функций.

- Если $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{a}|$.
- $\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t)$.
- $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)\mathbf{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t)$ ($f(t)$ — скалярная функция).
- $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t)$.
- $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t)$

В свойствах 2° – 5° все рассматриваемые функции определены на некотором множестве $X \subset R$; предполагается, что все пределы, входящие в правые части равенств, существуют, и утверждается, что существуют пределы, стоящие в левых частях, причем имеют место написанные формулы.

Теорема о дифференцируемости векторных функций.

Теорема 1

Если вектор-функция $r(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$|r(b) - r(a)| \leq |r'(\xi)|(b - a). \quad (9)$$

▷ Если $r(a) = r(b)$, то неравенство 9 справедливо при любом выборе точки $\xi \in (a, b)$, так как его левая часть обращается в нуль.

Теорема о пределе вектор-функции.

Теорема 2

Пусть вектор-функция $r(t)$ определена в проколотой окрестности точки t_0 , $t_0 \in \mathbf{R}$, а $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ - её координатные функции. Пусть, далее, r_0 - некоторый вектор, а x_0, y_0, z_0 его координаты. Вектор r_0 является пределом вектор-функции $r(t)$ при $t \rightarrow t_0$ тогда и только тогда, когда его координаты являются пределами при $t \rightarrow t_0$ соответствующих координатных функций:

$$r_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} r(t) \iff \left| \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0 \right| \quad (10)$$