

ПетрГУ

Лабораторная работа 5

Должность: Студент

Петраков Н. В.,
группа 22101

Лаб. раб. 5

Петраков

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(1)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(2)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(3)

Ранг
матрицы(1)

Ранг
матрицы(2)

Исследование
систем
линейных
уравнений

Однородные
системы
линейных

Содержание

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(1)

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(2)

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(3)

Ранг матрицы(1)

Ранг матрицы(2)

Исследование систем линейных уравнений

Однородные системы линейных уравнений(1)

Однородные системы линейных уравнений(2)

Однородные системы линейных уравнений(3)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(1)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(2)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(3)

Ранг
матрицы(1)

Ранг
матрицы(2)

Исследование
систем
линейных
уравнений

Однородные
системы
линейных

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(1)

Рассмотрим задачу решения системы линейных уравнений размерностью $(m \times n)$. Запишем систему в матричном виде $A * X = B$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix} \quad (1)$$

Если закрепить раз и навсегда нумерацию неизвестных, то можно опустить неизвестные в записи системы и записать ее в виду матрицы, отделяя столбец свободных членов вертикальной чертой.

$$\bar{B} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & \dots & . & b_3 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (2)$$

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(1)

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(2)

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(3)

Ранг матрицы(1)

Ранг матрицы(2)

Исследование систем линейных уравнений

Однородные системы линейных

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(2)

Следующие действия над расширенной матрицей системы называются элементарными преобразованиями.

- ▶ Умножение или деление элементов строк на одно и то же число, не равное нулю
- ▶ Перестановка двух строк
- ▶ Прибавление к элементам строки элементов другой строки, умноженных на произвольный множитель

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(1)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(2)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(3)

Ранг
матрицы(1)

Ранг
матрицы(2)

Исследование
систем
линейных
уравнений

Однородные
системы
линейных

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(3)

Конечной целью элементарных преобразований является получение верхнеугольной матрицы, у которой все элементы, стоящие под главной диагональю равны нулю. Преобразования стараются производить так, чтобы на главной диагонали появлялись единицы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{array} \right)$$

Далее решаем получившуюся систему уравнений уже известным нам способом - подстановкой.

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(1)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(2)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(3)

Ранг
матрицы(1)

Ранг
матрицы(2)

Исследование
систем
линейных
уравнений

Однородные
системы
линейных

Ранг матрицы(1)

Определение

Рангом матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

Определитель, порядок которого равен рангу матрицы, называется базисным минором. Он может быть единственным.

Можно показать, что эквивалентные преобразования не меняют ранг матрицы. Поэтому, когда требуется вычислить ранг матрицы, ее приводят к треугольному виду.

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(1)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(2)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(3)

Ранг
матрицы(1)

Ранг
матрицы(2)

Исследование
систем
линейных
уравнений

Однородные
системы
линейных

Ранг матрицы(2)

Определение

Ранг матрицы равен числу ненулевых строк матрицы, приведенной к треугольному виду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(A) = 2$$

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(1)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(2)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(3)

Ранг
матрицы(1)

Ранг
матрицы(2)

Исследование
систем
линейных
уравнений

Однородные
системы
линейных

Исследование систем линейных уравнений

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема

Для того, чтобы система линейных алгебраических уравнений была совместна (имела решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы равнялся рангу матрицы коэффициентов: $r(\bar{B}) = r(A)$

Если $r(\bar{B}) = r(A) = n$ (числу неизвестных), то система совместна и определена (имеет единственное решение).
 Если $r(\bar{B}) = r(A) < n$, то система совместна и неопределена (имеет бесконечное множество решений).
 Если $r(\bar{B}) \neq r(A)$

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(1)

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(2)

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(3)

Ранг матрицы(1)

Ранг матрицы(2)

Исследование систем линейных уравнений

Однородные системы линейных

Однородные системы линейных уравнений(1)

Определение

Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные члены ее равны нулю

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Однородная система всегда имеет решение: $x_1 = 0$
 $x_2 = 0 \dots x_n = 0$ Это решение называется тривиальным.
 оно является единственным решением системы в
 случае, когда $r(A) = n$. Если $r(A) < n$, то система имеет
 бесконечное множество решений.

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(1)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(2)

Однородные системы

Однородные системы линейных уравнений(2)

Пусть: $r(A) = r < n$ Тогда система имеет r базисных переменных и $n-r$ свободных переменных. Общее решение системы запишется в виде: $X =$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ \dots \\ x_r(t_1, \dots, t_{n-r}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(1)

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(2)

Решение систем уравнений. Метод Гаусса(3)

Ранг матрицы(1)

Ранг матрицы(2)

Исследование систем линейных уравнений

Однородные системы

Однородные системы линейных уравнений(3)

Выберем $n - r$ частных решений однородной системы, полученных из общего решения следующим образом: полагаем одно из значений свободных переменных равным 1, а остальные равными 0:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1(1, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ x_r(1, 0, \dots, 0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0, 1, \dots, 0) \\ \vdots \\ x_r(0, 1, \dots, 0) \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0, 0, \dots, 1) \\ \vdots \\ x_r(0, 0, \dots, 1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Эти решения образуют фундаментальную систему решений однородной системы (ФСР).

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(1)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(2)

Решение
систем
уравнений.
Метод
Гаусса(3)

Ранг
матрицы(1)

Ранг
матрицы(2)

Исследование
систем
линейных
уравнений

Однородные
системы