

▷ В самом деле, перейдя в левой части неравенства (23.9) к верхней грани по разбиениям τ_1 , получим что для любого разбиения τ_2 выполняется неравенство $I_* \leq S_{\tau_2}$. Перейдя здесь к нижней грани по τ_2 , получим $I_* \leq I^*$.
◁

Интегралы I_* и I^* понадобятся нам ниже при доказательстве критерия интегрируемости функции.

23.5. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функций.

Теорема 2. Для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы разность верхних и нижних сумм Дарбу стремилась к нулю, когда мелкость разбиений отрезка стремится к нулю:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (S_\tau - s_\tau) = 0 \quad (1)$$

Следствие . Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f была на нем интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f) \Delta x_k \quad (2)$$

где $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, а $\omega_k(f)$ — колебание функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, k_\tau$.

▷ **Необходимость.** Пусть ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f интегрируема на этом отрезке и $I = \int_a^b f(x) dx$. Тогда $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sigma_\tau = I$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, каковы бы ни были разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$, имеющее мелкость $|\tau| < \delta$, и точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, k_\tau$, для интегральной суммы $\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi_1; \dots, \xi_{k_\tau})$ выполняется равенство

$$I - \varepsilon < \sigma_\tau < I + \varepsilon \quad (3)$$

Переходя в неравенстве (3) к нижней и верхней граням относительно точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k_\tau}$, в силу свойств сумм Дарбу (23.14) и (23.15) получим

$$I - \varepsilon \leq s_\tau \leq S_\tau \leq I + \varepsilon$$

Таким образом, если $|\tau| < \delta$, то $0 \leq S_\tau - s_\tau \leq 2\varepsilon$. Отсюда сразу и следует, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$$

Достаточность. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ и для ее сумм Дарбу выполняется условие (1). Из определения нижнего I_* и верх-

него I^* интегралов (см. п. 23.4) и неравенства (23.19) имеем

$$s_\tau \leq I_* \leq I^* \leq S_\tau \quad (4)$$

Поэтому $0 \leq I^* - I_* \leq S_\tau s_\tau$. Отсюда в силу условия (1) следует, что $I^* - I_* = 0$. Обозначим общее значение нижнего и верхнего интегралов через I , т. е. $I = I_* = I^*$. Из (4) будем иметь $s_\tau \leq I \leq S_\tau$, но любая интегральная сумма δ_τ также лежит между суммами Дарбу s_τ и S_τ (см. (23.8)): $s_\tau \leq \delta_\tau \leq S_\tau$, поэтому $|\delta_\tau - I| \leq S_\tau - s_\tau$. Отсюда в силу условия (1) следует, что $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} |\delta_\tau - I| = 0$. Это означает, что существует предел интегральных сумм

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \delta_\tau = I, \quad (23.24)$$

т. е. функция f интегрируема, причем

$$\int_a^b f(x) dx = I. \quad (23.25)$$

Следствие непосредственно вытекает из свойства (23.16) сумм Дарбу: условие (23.21) равносильно в силу указанного свойства условию (23.20).

Теорема 3. *если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, а s_τ и S_τ - ее суммы Дарбу, то*

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} s_\tau = \lim_{|\tau| \rightarrow 0} S_\tau = \int_a^b f(x) dx \quad (23.26)$$

▷ Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то согласно теореме 2 выполняется условие (23.20). При доказательстве теоремы 2 было показано, что при выполнении этого условия верхний интеграл функции совпадает с ее нижним интегралом: $I_* = I^* = I$ (а поэтому в силу (23.23) $s_\tau \leq I \leq S_\tau$), и что $I = \int_a^b f(x) dx$. Следовательно, $0 \leq I - s_\tau \leq S_\tau - s_\tau$. Отсюда в силу невыполнения условия (23.20) следует, что $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} (I - s_\tau) = 0$ и $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} (S_\tau - I) = 0$.

А это равносильно существованию пределов (23.26). ◁

23.6. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.

Теорема 4. *Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем.*

▷ Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она, во-первых, ограничена на нем, а во-вторых, равномерно непрерывна. Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in [a, b]$ и $x' \in [a, b]$, таких, что $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.

Возьмем для отрезка $[a, b]$ какое-либо разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ мелкости $|\tau| < \delta$. Тогда для любых двух точек x и x' , принадлежащих одному и тому же отрезку разбиения τ , $x \in [x_k - x_{k-1}]$, $x' \in [x_k - x_{k-1}]$, имеет место неравенство $|x' - x| \leq x_k - x_{k-1} = \Delta x_k \leq |\tau| < \delta$, а поэтому и неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Отсюда следует, что колебание $\omega_k(f)$ функции f на

отрезке $[x_k - x_{k-1}]$ удовлетворяет неравенству

$$\omega_k(f) \leq \varepsilon \quad (23.27)$$

Следовательно,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f) \Delta x_k \leq_{(23.27)} \varepsilon \sum_{k=1}^{k_\tau} \Delta x_k = \varepsilon(b-a). \quad (23.28)$$

Поскольку ε было произвольным положительным числом, то неравенство (23.28) означает, что $\sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f) \Delta x_k = 0$. Поэтому в силу следствия 1 теоремы 2 функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. $\triangleleft$

Теорема 5. *Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на нем.*

$\triangleright$ пусть для определенности функция f возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда, в частности, для любого $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

и, следовательно, функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Очевидно также, что в силу возрастания функции f для любого разбиения $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k_\tau}$ отрезка $[a, b]$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} m_k &= \inf_{x \in [x_k - x_{k-1}]} f(x) = f(x_{k-1}), \\ M_k &= \sup_{x \in [x_k - x_{k-1}]} f(x) = f(x_k). \end{aligned} \quad (23.29)$$

Поэтому, заметив, что

$$x_k - x_{k-1} = \Delta x_k \leq |\tau|, k = 1, 2, \dots, k_\tau \quad (23.30)$$

и что $x_0 = a, x_{k_\tau} = b$, получим

$$\begin{aligned} S_\tau - s_\tau &= \sum_{k=1}^{k_\tau} (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{k_\tau} [f(x_k) - f(x_{k-1})] \Delta x_k \leq_{(23.30)} \\ &\leq_{(23.30)} [(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \dots \\ &\dots + (f(x_{k_\tau}) - f(x_{k_\tau-1}))] |\tau| = [f(b) - f(a)] |\tau| \end{aligned}$$