

ПетрГУ

Лабораторная работа 5

Выполнил Захаров Марк
22101, ИМИТ

Содержание презентации

- 1 Определение линейной комбинации
- 2 Определение линейной зависимости
- 3 Теорема 1
- 4 Теорема 2

Линейная комбинация

Линейной комбинацией векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ называется сумма

$$\lambda_1 \overline{x_1} + \lambda_2 \overline{x_2} + \dots + \lambda_n \overline{x_n} \quad (1)$$

Линейная комбинация векторов $\lambda_1 \overline{x_1} + \lambda_2 \overline{x_2} + \dots + \lambda_n \overline{x_n}$ называется нетривиальной, если числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не равны одновременно нулям: $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Система векторов $(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$ называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору:

$$\lambda_1 \overline{x}_1 + \dots + \lambda_n \overline{x}_n = 0, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \quad (2)$$

Теорема 1

Теорема

Если хотя бы один из векторов $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ является нулевым, то эти векторы являются линейно зависимыми.

Доказательство теоремы 1

Доказательство.

Пусть первый вектор $\overline{x_1} = \mathbf{0}$. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация векторов $\mathbf{1} \times \overline{x_1} + \mathbf{0} \times \overline{x_2} + \dots + \mathbf{0} \times \overline{x_n} = \mathbf{0}$.

Значит, векторы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ линейно зависимы.

Теорема доказана



Теорема 2

Теорема

Если среди n векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n$ какие-либо $m < n$ векторов линейно зависимы, то и все векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n$ линейно зависимы.

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

Поскольку при перестановке местами векторов в системе векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ линейная зависимость или линейная независимость системы не меняется, то перестановкой можно добиться, чтобы первые $m < n$ векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_m}$ были линейно зависимыми. Но тогда найдется такая нетривиальная линейная комбинация

$$\lambda_1 \overline{x_1} + \dots + \lambda_m \overline{x_m} = 0$$

Но тогда справедливо следующее равенство:

$$\lambda_1 \overline{x_1} + \dots + \lambda_m \overline{x_m} + 0 \times \overline{x_{m+1}} + \dots + 0 \times \overline{x_n} = 0,$$

т. е. вся система векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ является линейно зависимой. Теорема доказана