

изводные; при этом имеют место формулы

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' = \lambda_1 y_1' \quad (1)$$

$$(y_1 y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2' \quad (2)$$

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2} \quad (3)$$

(В формулах (1)–(2) значения всех функций взяты при $x = x_0$.)

►Прежде всего заметим, что в силу условий теоремы в точке x_0 существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} = y_1', \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = y_2'.$$

Докажем теперь последовательно формулы (1)–(3).

1) Пусть $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$; тогда

$$\Delta y = (\lambda_1 (y_1 + \Delta y_1) + \lambda_2 (y_2 + \Delta y_2)) - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \Delta y_1 + \lambda_2 \Delta y_2$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lambda_1 \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \lambda_2 \frac{\Delta y_2}{\Delta x}$$

Перейдя здесь к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим формулу (1).

2) Пусть $y = y_1 y_2$; тогда

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1)(y_2 + \Delta y_2) - y_1 y_2 = y_2 \Delta y_1 + y_1 \Delta y_2 + \Delta y_1 \Delta y_2,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 + y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \Delta y_2. \quad (4)$$

Заметив, что в силу непрерывности функции f_2 в точке x_0 выполняется условие $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta y_2 = 0$, и, перейдя в равенстве (4) к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим формулу (2)

3) Пусть $f_2(x_0) \neq 0$ и $y = \frac{y_1}{y_2}$; тогда

$$\Delta y = \frac{y_1 + \Delta y_1}{y_2 + \Delta y_2} - \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2 \Delta y_1 - y_1 \Delta y_2}{y_2(y_2 + \Delta y_2)},$$

следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 - y_2 \frac{\Delta y_2}{\Delta x}}{y_2(y_2 + \Delta y_2)}$$

Перейдя здесь к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим формулу (3). $\triangleleft$

Отметим, что из формулы 1 при $y_2 = 0$ (так же, как и из формулы (2), когда функция y_2 равна постоянной, а поэтому $y_2' = 0$ следует, что постоянную можно выносить из-под знака дифференцирования, т.е.

$$(\lambda y)' = \lambda y', \quad \lambda \in R.$$

Пример. Вычислим производную функции $\operatorname{tg} x$. Применяя формулу (3), получим

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (5)$$

Аналогично выполняется

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Замечание. Поскольку $dy = y'dx$, то умножая формулы (1)-(3) на dx , получим

$$d(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 dy_1 + \lambda_2 dy_2,$$

$$d(y_1 y_2) = y_2 dy_1 + y_1 dy_2,$$

$$d \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{y_2^2}.$$

10.6. Производная обратной функции.

Теорема 1. Если функция f непрерывна и строго монотонна в окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция f^{-1} имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ и

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}. \quad (6)$$

$\triangleright$ Пусть функция f строго монотонна и непрерывна в окрестности $U = U(x_0)$ в точке x_0 ; тогда обратная функция f^{-1} строго монотонна

и непрерывна на интервале $V = f(U)$ (см. теорему 4 п. 7.3). Поэтому если $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$, то для функции $y = f(x)$ имеет место $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ и $\Delta y \neq 0$ при $\Delta x \neq 0$, а для функции $x = f^{-1}(y)$ — соответственно $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0$ и $\Delta x \neq 0$ при $\Delta y \neq 0$. Заметив это, вычислим производную обратной функции следующим образом:

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=y_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}^{-1} \quad (7)$$

Замечание. Если функция f непрерывна и строго монотонна в окрестности точки x_0 и существует $f'(x_0) = 0$, то обратная функция f^{-1} имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ бесконечную производную $\frac{df^{-1}(y_0)}{dx} = \infty$. Это сразу следует из соотношения (7).

Примеры. 1. Если

$$y = \arcsin x, -1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad x = \sin y,$$

то

$$(\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. Если $y = \arccos x$, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$, $x = \cos y$, то

$$(\arccos x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. Если $y = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $x = \operatorname{tg} y$, то

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. Аналогично,

$$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

5. Если $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1, x > 0, -\infty < y < +\infty, x = a^y$, то

$$(\log_a x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

в частности,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

10.7. Производная и дифференциал сложной функции Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности $U = U(x_0)$ точки x_0 , а функция $z = g(y)$ — в некоторой окрестности $V = V(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$, причем $f(U) \subset V$ и следовательно, определена сложная функция

$$F(x) = g(f(x)).$$

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $z = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $z = F(x) = g(f(x))$ также имеет в точке x_0 производную, причем

$$F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0), \quad (8)$$

или, опуская значение аргумента

$$z'_x = z'_y y'_x. \quad (9)$$

▷ Пусть, как всегда, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ и $\Delta z = g(y) - g(y_0)$; тогда в силу дифференцируемости функции g в точке y_0 будем иметь (см.(10.11))

$$\Delta z = g'(y_0)\Delta y + \epsilon(\Delta y)\Delta y, \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \epsilon(\Delta y) = 0. \quad (10)$$