

Если $a < \eta < \eta' < b$, то в силу неотрицательности функции f

$$\int_{\eta}^{\eta'} f(x) dx \geq 0$$

, поэтому

$$\varphi(\eta') = \int_a^{\eta'} f(x) dx = \int_a^{\eta} f(x) dx + \int_{\eta}^{\eta'} f(x) dx \geq \int_a^{\eta} f(x) dx = \varphi(\eta),$$

т.е. φ является монотонно возрастающей функцией. Поэтому предел $\lim_{\eta \rightarrow b-0} \varphi(\eta)$ конечный или бесконечный всегда существует (см. п. 4.8); при этом этот предел конечен тогда и только тогда, когда функция φ ограничена сверху, т.е. когда выполняется условие (33.8).

Наконец (см. п. 4.8),

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow b-0} \varphi(\eta) = \sup_{a \leq \eta < b} \varphi(\eta)$$

т.е. имеет место формула (33.9).

Теорема доказана Из теоремы 1 следует также, что, для того чтобы несобственный

интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходился, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(\eta)$ была не ограничена сверху, но тогда в силу ее монотонности

$$\lim_{\eta \rightarrow b-0} \varphi(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow b-0} \int_a^{\eta} f(x) dx = +\infty.$$

Поэтому, если несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ от неотрицательной функции f расходится, то пишут

$$\int_a^b f(x) dx = +\infty.$$

В дальнейшем в настоящем пункте мы будем всегда предполагать, что

- 1) функции f и g определены и неотрицательны $f \geq 0, g \geq 0$ на $[a, b]$;
- 2) интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a, b - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Нижесформулированные и доказанные теоремы называются обычно признаками сравнения сходимости несобственных интегралов

Теорема 2. Пусть

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow b - 0^*),$$

тогда:

1) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^b f(x)dx;$$

2) если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и ин-

теграл $\int_a^b g(x)dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится. Из условия (33.11) следует существование такого $\eta_0 \in [a, b)$ и такого $\varepsilon > 0$, что для всех $x \in [\eta_0, b)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq cg(x)$$

см. п. 8.2). Из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует и сходимост ь интеграла $\int_{\eta}^b g(x)dx$. В силу же необходимости условий теоремы 1 для сходимости интеграла, существует такое число $M < 0$, для любого $\eta \in [\eta_0, b)$ справедливо неравенство

$$\int_{\eta_0}^b g(x)dx \leq M.$$

Отсюда и из неравенства (33.12) имеем

$$\int_{\eta_0}^{\eta} f(x)dx \leq c \int_{\eta_0}^{\eta} g(x)dx \leq cM.$$

Из этого неравенства, в силу достаточности условий теоремы 1 для сходимости интеграла от неотрицательной функции получаем, что интеграл $\int_{\eta_0}^{\eta} f(x)dx$, а следовательно, и интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

Утверждение 1 теоремы доказано. Докажем второе.

Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int_a^b g(x)dx$ не может сходиться: если бы он сходил, то в силу уже доказанного сходил бы и интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом, интеграл $\int_a^b g(x)dx$ расходится.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть $g(x) \neq 0, a \leq x < b$, и

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

тогда:

1) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится и $0 \leq k < +\infty$, то и интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

также сходится;

2) если интеграл

$$\int_a^b g(x)dx$$

расходится и $0 > k \geq -\infty$, то и интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

также расходится.

В частности, если $f \sim g$ (см. п. 8.3), то интегралы $\int_a^+ f(x)dx$ и $\int_a^+ g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

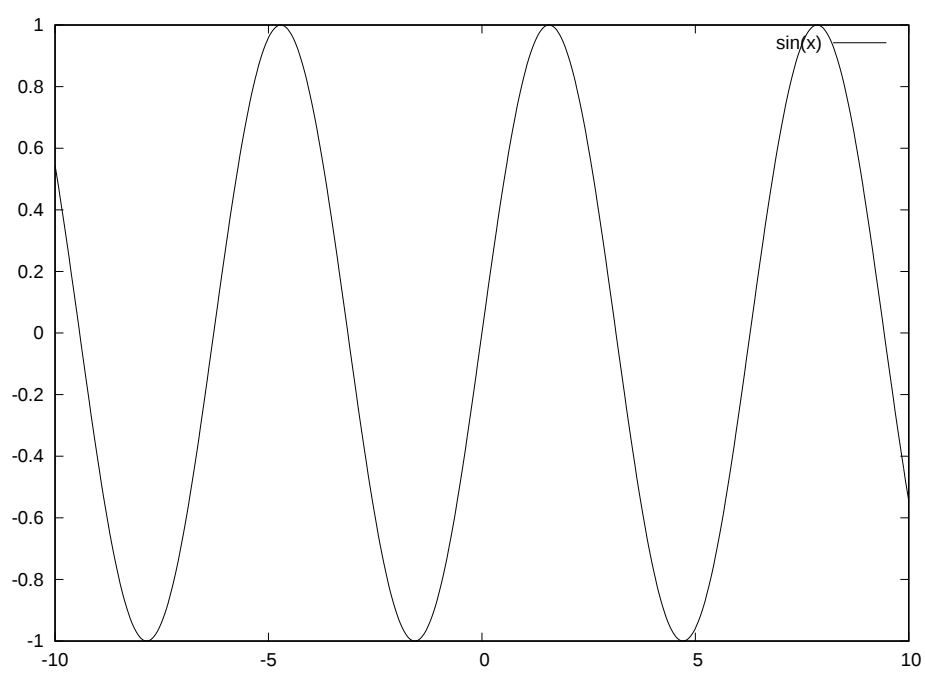


Рис. 1. $\sin(x)$.