

ПетрГУ

Лабораторная работа 5

Должность: Студент

Лотник Д.А.,

гр. 22101

Производная и дифференциал векторной функции.

Пусть векторная функция $\mathbf{r}(t)$ задана в некоторой окрестности точки t_0 ; тогда соотношение $\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}$ определено в соответствующей проколотой окрестности точки t_0 .

Определение

Предел $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}$ (если он, конечно, существует)

называется производной векторной функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается $\mathbf{r}'(t_0)$ или $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$.

Пусть $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Так как

$$\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \right),$$

то в силу (16.9), (16.10) для того, чтобы векторная функция $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ имела производную в точке t_0 , необходимо и достаточно, чтобы ее координаты $x(t), y(t), z(t)$ имели производные в точке t_0 , причем в этом случае

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \quad (1)$$

Производную $\mathbf{r}'(t)$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ называют также скоростью изменения вектора $\mathbf{r}(t)$ относительно параметра t . В случае когда длина вектора $\mathbf{r}(t)$ не меняется, производная $\mathbf{r}'(t)$ называется также и скоростью вращения вектора $\mathbf{r}(t)$, а ее абсолютная величина - численным значением скорости его вращения.

Определение

Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$, заданная в некоторой окрестности точки t_0 , называется дифференцируемой при $t = t_0$, если ее приращение $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$ в точке t_0 представимо в виде

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{a} \Delta t + \mathbf{o}(\Delta t), \Delta t \rightarrow 0. \quad (2)$$

Теорема

Если вектор функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него, то существует такая точка $\varepsilon \in (a, b)$, что

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = |\mathbf{r}'(\varepsilon)|(b - a) \quad (3)$$