Если a$< \eta < \eta' < b$,то в силу неотрицательности функции f

$$\int_{\eta}^{\eta'} f(x)dx \geq 0$$

, поэтому

$$\varphi(\eta') = \int_{a}^{\eta'} f(x)dx = \int_{a}^{\eta} f(x)dx + \int_{\eta}^{\eta'} f(x)dx \geq \int_{a}^{\eta} f(a)dx = \varphi(\eta),$$

т.е. φ является монотонно возрастающей функцией. Поэтому предел $\lim\limits_{\eta\to b-0} \varphi(\eta)$ конечный или бесконечный всегда существует (см. п. 4.8); при этом этот предел конечен тогда и только тогда, когда функция φ огничена сверху, т.е когда выполняется условие (33.8).

Наконец (см. п. 4.8),

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\eta\to b-0} \varphi(\eta) = \sup_{a\leqslant\eta<b} \varphi(\eta)$$

т.е. имеет место формула (33.9).
Теорема доказана Из теоремы 1 следует также, что, для того чтобы несобстве

ный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ расходился, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(\eta)$ была не ограничена сверху, но тогда в силу ее монотонности

$$\lim_{\eta\to b-0} \varphi(\eta) = \lim_{\eta\to b-0} \int_{a}^{\eta} f(x)dx = +\infty.$$

Поэтому, если несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ от неотрицательной функции f расходится, то пишут

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = +\infty.$$

В дальнейшем в настоящем пункте мы будем всегда предполагать, что
1) функции f и g определены и неотрицательны $f \geqslant 0, g \geqslant 0$ на [a,b);
2) интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a, b-\varepsilon], \varepsilon > 0$.

Нижесформулированные и доказанные теоремы называются обычно признаками сравнения сходимости несобственных интегралов

Теорема 2. Пусть

$$f(x) = 0(g(x)), x \to b - 0^*),$$

тогда:

1) если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$;

2) если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится. Из условия (33.11) следует существование такого $\eta_0 \in [a, b)$ и такого $\varepsilon > 0$, что для всех x$\in [\eta_0, b)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant cg(x)$$

см. п. 8.2). Из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует и сходимость интеграла $\int\limits_\eta^b {}_0 g(x)dx$. В силу же необходимости условий теоремы 1 для сходимости интеграла, существует такое число M<0, для любого $\eta \in [\eta_0, b)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\eta_0}^b g(x)dx \leq M.$$

Отсюда и из неравенства (33.12) имеем

$$\int\limits_{\eta_0}^\eta f(x)dx \leq c \int\limits_{\eta_0}^\eta g(x)dx \leq cM.$$

Из этого неравенства, в силу достаточности условый теоремы 1 для сходимости интеграла от неотрицательной функции получаем, что интеграл $\int\limits_{\eta_0}^{\eta} f(x)dx$, а следовательно, и интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$сходится.

Утверждение 1 теоремы доказано. Докажем второе.

Если интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$ не может сходится: если бы он сходился, то в силу уже доказанного сходился бы и интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$. Таким образом, интеграл $\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$ расходится.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть $g(x) \neq 0, a \leq x > b$, и

$$\lim_{\eta \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

тогда:

1) если интеграл $\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$

сходится и $0 \leq k > +\infty$, то и интеграл

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

также сходится;

2) если интеграл

$$\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$$

расходится и $0 > k \leq \infty$, то и интеграл

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

также расходится.

В частности, если $f \sim g$ (см. п. 8.3), то интегралы$\int\limits_{a}^{+} \infty f(x)dx \int\limits_{a}^{+} \infty g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.