

Если  $a < \eta < \eta' < b$ , то в силу неотрицательности функции  $f$

$$\int_{\eta}^{\eta'} f(x) dx \geq 0$$

, поэтому

$$\varphi(\eta') = \int_a^{\eta'} f(x) dx = \int_a^{\eta} f(x) dx + \int_{\eta}^{\eta'} f(x) dx \geq \int_a^{\eta} f(x) dx = \varphi(\eta),$$

т.е.  $\varphi$  является монотонно возрастающей функцией. Поэтому предел  $\lim_{\eta \rightarrow b-0} \varphi(\eta)$  конечный или бесконечный всегда существует (см. п. 4.8); при этом этот предел конечен тогда и только тогда, когда функция  $\varphi$  ограничена сверху, т.е. когда выполняется условие (33.8).

Наконец (см. п. 4.8),

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow b-0} \varphi(\eta) = \sup_{a \leq \eta < b} \varphi(\eta)$$

т.е. имеет место формула (33.9).

Теорема доказана Из теоремы 1 следует также, что, для того чтобы несобственный

интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  расходился, необходимо и достаточно, чтобы функция  $\varphi(\eta)$  была не ограничена сверху, но тогда в силу ее монотонности

$$\lim_{\eta \rightarrow b-0} \varphi(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow b-0} \int_a^{\eta} f(x) dx = +\infty.$$

Поэтому, если несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  от неотрицательной функции  $f$  расходится, то пишут

$$\int_a^b f(x) dx = +\infty.$$

В дальнейшем в настоящем пункте мы будем всегда предполагать, что

- 1) функции  $f$  и  $g$  определены и неотрицательны  $f \geq 0, g \geq 0$  на  $[a, b]$ ;
- 2) интегрируемы по Риману на любом отрезке  $[a, b - \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Нижесформулированные и доказанные теоремы называются обычно признаками сравнения сходимости несобственных интегралов

**Теорема 2.** Пусть

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow b - 0^*),$$

тогда:

1) если интеграл  $\int_a^b g(x)dx$  сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^b f(x)dx;$$

2) если интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  расходится, то расходится и ин-

теграл  $\int_a^b g(x)dx$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть интеграл  $\int_a^b g(x)dx$  сходится. Из условия (33.11) следует существование такого  $\eta_0 \in [a, b)$  и такого  $\varepsilon > 0$ , что для всех  $x \in [\eta_0, b)$  выполняется неравенство

$$f(x) \leq cg(x)$$

см. п. 8.2). Из сходимости интеграла  $\int_a^b g(x)dx$  следует и сходимост ь интеграла  $\int_{\eta}^b g(x)dx$ . В силу же необходимости условий теоремы 1 для сходимости интеграла, существует такое число  $M < 0$ , для любого  $\eta \in [\eta_0, b)$  справедливо неравенство

$$\int_{\eta_0}^b g(x)dx \leq M.$$

Отсюда и из неравенства (33.12) имеем

$$\int_{\eta_0}^{\eta} f(x)dx \leq c \int_{\eta_0}^{\eta} g(x)dx \leq cM.$$

Из этого неравенства, в силу достаточности условий теоремы 1 для сходимости интеграла от неотрицательной функции получаем, что интеграл  $\int_{\eta_0}^{\eta} f(x)dx$ , а следовательно, и интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  сходится.

Утверждение 1 теоремы доказано. Докажем второе.

Если интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  расходится, то интеграл  $\int_a^b g(x)dx$  не может сходиться: если бы он сходил, то в силу уже доказанного сходил бы и интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ . Таким образом, интеграл  $\int_a^b g(x)dx$  расходится.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть  $g(x) \neq 0, a \leq x < b$ , и

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

тогда:

1) если интеграл  $\int_a^b g(x)dx$  сходится и  $0 \leq k < +\infty$ , то и интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

также сходится;

2) если интеграл

$$\int_a^b g(x)dx$$

расходится и  $0 > k \geq -\infty$ , то и интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

также расходится.

В частности, если  $f \sim g$  (см. п. 8.3), то интегралы  $\int_a^+ f(x)dx$  и  $\int_a^+ g(x)dx$  сходятся или расходятся одновременно.